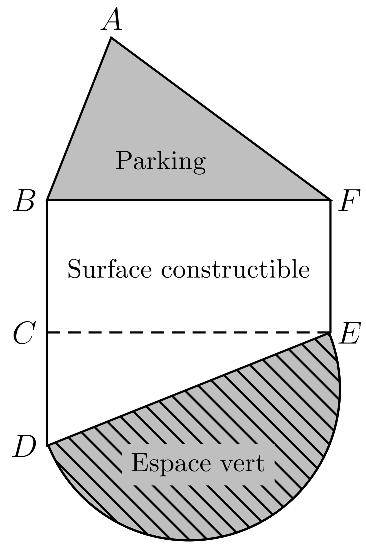
Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE (9 points)

Une municipalité dispose d'un terrain sur lequel elle veut réaliser un parking, une piscine (avec un bassin de compétition et un petit bassin) et un espace vert selon le plan ci-contre (le dessin n'est pas à l'échelle).
Le parking sera réalisé dans le triangle ABF.
La piscine sera construite dans le trapèze $BDEF$ rectangle en B.
L'espace vert sera réalisé dans le demi-cercle de diamètre $[ED]$.



La figure en annexe est à compléter et à rendre avec la copie.

On donnera les longueurs demandées en les arrondissant au mètre (m) près et les aires au mètre carré (m^2) près.

I) Calcul de l'aire du parking.

On désigne par H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF.
On donne $\hat{B} = 63°$, $BH = 50$ m et $AF = 125$ m.

1) Placer, sur la figure en annexe, le point H.
Calculer la longueur AH.

2) Déterminer, au degré près, une mesure de l'angle $\hat{F}$ puis la longueur FH.

3) En déduire que la longueur, arrondie au mètre près, du segment $[BF]$ est 127 m.
Calculer l'aire du triangle ABF.

II) Calcul de l'aire de la surface constructible.

On mesure $EF = 60$ m.
C est le point du segment $[BD]$ tel que le quadrilatère $BCEF$ soit un rectangle.

1) Placer, sur la figure en annexe, le point I milieu de $[CE]$ et tracer la parallèle à la droite (CD) passant par I. Elle coupe $[DE]$ en O et on a $OI = 45$ m.
Calculer la longueur CD.

2) En déduire la longueur BD.
Montrer que l'aire du trapèze $BDEF$ est égale à 13 335 m^2.

III) Calcul de l'aire de l'espace vert.

1) Calculer la longueur ED.

2) En déduire l'aire du demi-disque de diamètre $[ED]$.

IV) Dimensions de la piscine.

On veut construire une piscine rectangulaire dans la partie $BDEF$.
On appelle x sa longueur. On impose que :

- la surface au sol de la piscine représente 40 % de la surface totale de la partie $BDEF$,
- la largeur de la piscine soit inférieure de 60 m à sa longueur.

1) Exprimer la largeur de la piscine puis l'aire de sa surface au sol en fonction de x.

2) Montrer que x est solution de l'équation : $x^2 - 60x - 5\,334 = 0$.

3) Résoudre cette équation.

4) En déduire une valeur approchée, arrondie au mètre près, de chacune des dimensions de la piscine.

PROBLEME (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées. On note I l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Soit f la fonction définie pour tout x de I par : $f(x) = 3 - x^2 + 2\ln x$.
On appelle C la courbe représentative de f dans le repère ci-dessus.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2) Vérifier que, pour tout x de I, $f(x) = 3 - x\left(x - 2\,\dfrac{\ln x}{x}\right)$; en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) a) Montrer que, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{2-2x^2}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Vérifier que, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{2(1-x)(1+x)}{x}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I, puis établir le tableau de variation de f.

4) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (on arrondira les valeurs à 10^{-1} près) :

x	0,5	0,75	1	1,5	2	3	3,5
$f(x)$			2		0,4		

5) Tracer la courbe C (sur une feuille de papier millimétrique qui sera rendue avec la copie).

6) Soit la fonction F définie pour tout x de I par : $F(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x\ln x$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur I.

b) Hachurer la région délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

c) Calculer la valeur exacte de l'aire de cette région en unités d'aire, puis en cm^2.
Donner une valeur approchée de cette dernière à 10^{-2} près.

<u>ANNEXE</u> (à rendre avec la copie)