Cours : Probabilités

Nous nous plaçons dans le cadre d'une **expérience aléatoire** ne débouchant que sur un nombre fini de résultats.

I. Éventualités, événements et univers

1) Éventualités et univers

Définitions

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont des **éventualités** (synonymes : **cas**, **issues**, **résultats** ou **événements élémentaires**).
L'ensemble des éventualités est appelé **univers** (de l'expérience).

Exemple 1

Considérons un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Nous le lançons une fois et regardons le chiffre apparaissant sur la face du dessus.

Vocabulaire	Dans cet exemple
Éventualités : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$	Ce sont ici : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et il y en a 6.
Univers $\boldsymbol{E}$: $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.	$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple 2

Lançons le dé deux fois. Les éventualités peuvent alors être représentées sous forme de couples $(a; b)$ (a : 1er chiffre, b : second chiffre).

Éventualités	Ce sont ici : (1 ; 1), (1 ; 2), ..., (6 ; 6) et il y en a 36.
Univers	$E = \{(1; 1), (1; 2), \ldots, (6; 6)\}$.

Exemple 3

Nous nous intéressons à la somme des deux lancers d'un dé.

Éventualités	Ce sont ici : 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 12 et il y en a 11.
Univers	$E = \{2; 3; 4; \ldots; 12\}$

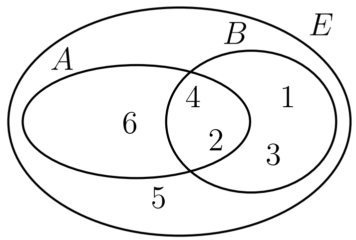
2) Événements

Définition

Un **événement** est une partie de l'univers.

Exemple 1

L'événement A : « le chiffre est pair » correspond à l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$ et contient 3 éventualités.
L'événement B : « le chiffre est inférieur à 5 » correspond à $B = \{1; 2; 3; 4\}$ et contient 4 éventualités.
Avec un graphique :



Définitions

Un événement peut être **impossible** : on le note $\emptyset$.
Un événement peut être **certain** : il contient alors toutes les éventualités. Cet événement est l'univers E.

Exemple 1

L'événement C : « le chiffre est un 7 » est impossible ; $C = \emptyset$.
L'événement D : « le chiffre est un entier » est certain ; $D = E$.

3) Arbres et tableaux

Remarque

Les tableaux à double entrée permettent de représenter des situations où il y a deux « tirages » à la suite.

Exemple 4

On lance un dé à quatre faces deux fois. Dans combien de cas la somme des deux résultats sera-t-elle égale à 5 ?

1er lancer \ 2^{e} lancer	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

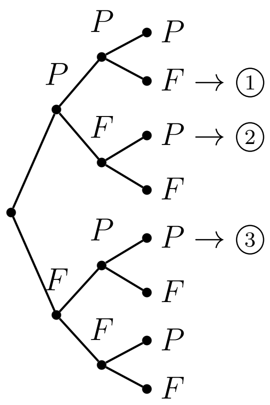
Donc la somme des deux résultats est égale à cinq : . . . fois.

Remarque

Les arbres permettent de représenter des situations où il y a plusieurs (deux ou plus) « tirages » à la suite.

Exemple 5

On lance une pièce trois fois, dans combien de cas y aura-t-il deux fois « pile » ?
Réponse : l'arbre ci-contre donne toutes les éventualités : il y a 8 chemins possibles de la gauche vers la droite donc 8 éventualités dans l'univers.
Pour l'événement « il y a deux « pile » », il suffit de parcourir l'arbre de la gauche vers la droite et de compter le nombre de fois où on est passé par deux P exactement.

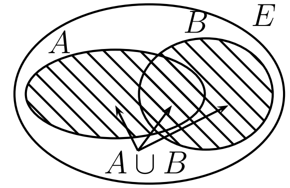


Il y a donc 3 éventualités dans cet évenement.

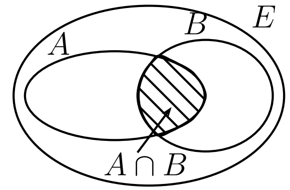
II. Réunion et intersection d'événements

Définitions

La **réunion** des événements A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), est l'ensemble des éventualités qui sont dans A **ou** dans B (ou dans les deux).



L'**intersection** des événements A et B, notée $A \cap B$ (« A inter B ») est l'ensemble des éventualités qui se trouvent dans A **et** dans B.



Exemple 1

$\{2; 4\} \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\}$; $\{2; 4\} \cap \{1; 2; 3\} = \{2\}$.

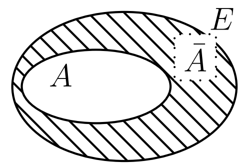
Définitions

Deux événements A et B sont **incompatibles** si $\boxed{A \cap B = \emptyset}$.

III. Événement contraire

Définition

Soit A un événement. L'**événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'événement constitué des éventualités qui ne sont pas dans A.



Exemple 1

Si $A = \{2; 5\}$ alors $\bar{A} = \{1; 3; 4; 6\}$.

IV. Loi de probabilité

Définition

On définit une **loi de probabilité** sur un univers en associant à toute éventualité x_i un nombre p_i positif (ou nul) ; les p_i étant tels que $\boxed{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1}$ où n est le nombre d'éventualités.
Une loi de probabilité peut souvent se représenter à l'aide d'un tableau :

éventualités (résultats) :	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	
probabilités :	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n	$\rightarrow$ total : 1

Exemple 6

Supposons que nous lancions lance un dé truqué tel que :
- le 6 a une chance sur deux de sortir ;
- les autres numéros ont entre eux la même chance de sortir.

Quelle est la loi de probabilité ?
Réponse :
Notons p la probabilité d'obtenir un 1 (ou un 2 ou $\ldots$).

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ donc $5\,p + \dfrac{1}{2} = 1$

d'où $5\,p = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne $p = \dfrac{1}{2} \div 5 = \dfrac{1}{10}$.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

Définition

Si $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n$ alors il y a **équiprobabilité**.

Exemple 7

C'est le cas quand nous lançons un dé non truqué.

Propriété 1

Dans une situation d'équiprobabilité : $\boxed{p_i = \dfrac{1}{n}}$ pour tout i.

Exemple 1

Si nous lançons un dé à six faces non truqué, chaque face a une probabilité égale à 1/6 d'apparaître.

V. Probabilité d'un événement

Définition

Si A est un événement alors $p(A)$ est la somme des probabilités des éventualités contenues dans A.

Exemple 6

Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat pair ?
Réponse : soit A l'événement « le chiffre est pair ». Alors, en utilisant la loi de cette expérience :
$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/10 + 1/10 + 1/2 = 7/10$.

Propriété 2

Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre total d'éventualités (dans } E)}}$$

(nombre de cas favorables / nombre de cas possibles).

Exemple 1

Pour un lancer d'un dé non truqué, il y a 6 cas possibles (nombre total d'éventualités) et 3 cas favorables (nombre d'éventualités réalisant « chiffre pair ») donc la probabilité d'obtenir un nombre pair est $3/6 = 1/2$.

Exemple 5

On lance trois fois une pièce non truquée. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux « pile » sur les trois lancers ?
Réponse : Les éventualités s'écrivent $(?;?;?)$ où ? désigne P ou F. L'arbre fait précédemment montre qu'il y a 8 éventualités au total.
Soit A l'événement : « on obtient deux « pile » sur les trois lancers ».
$A = \{(P;P;F);(P;F;P);(F;P;P)\}$ et contient donc 3 éventualités. Par conséquent, $p(A) = \frac{3}{8}$.

Exemple 2

On lance deux fois un dé non truqué.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux 3 ? une somme égale à 6 ?
Réponse :
Soient A l'événement « on obtient deux fois un 3 » et B l'événement « la somme est 6 ».
Nous savons qu'il y a 36 éventualités et qu'il y a équiprobabilité.
L'événement A s'écrit : $A = \{(3;3)\}$ et contient une éventualité donc $p(A) = \frac{1}{36}$.
L'événement B s'écrit : $B = \{(1;5);(2;4);(3;3);(4;2);(5;1)\}$ et contient donc 5 éventualités. Par conséquent, $p(B) = \frac{5}{36}$.

Propriété 3

Soient A et B deux événements. Nous admettons les propriétés suivantes :

$\boxed{p(\emptyset) = 0}$ $\quad$ $\boxed{p(E) = 1}$ $\quad$ $\boxed{0 \leq p(A) \leq 1}$

Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$.

Propriété 4

Soient A et B deux événements. On admet les propriétés suivantes :
$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$.
Si A et B sont incompatibles alors $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$.

Exemple 1

Soient A = « le chiffre est pair », B = « le chiffre est inférieur à 5 », C = « c'est un 5 ». Alors $p(A) = \frac{3}{6}$, $p(B) = \frac{4}{6}$ et $p(C) = \frac{1}{6}$.
$A \cap B$ est l'événement « le chiffre est pair et inférieur à 5 » donc donc $A \cap B = \{2;4\}$ d'où $p(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
$A \cup B$ est « le chiffre est pair ou inférieur à 5 » (ou les deux).
En utilisant la propriété 4, on trouve :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.
$A \cap C = \emptyset$. $A \cup C$ est l'événement « le chiffre est pair ou est 5 » et $p(A \cup C) = p(A) + p(C) - 0 = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Propriété 5

$\boxed{p\left(\bar{A}\right) = 1 - p(A)}$ $\qquad$ (et $p(A) = 1 - p\left(\bar{A}\right)$)

Exemple 2

Il y a 36 éventualités pour cette expérience.
Soit A l'événement « On obtient au moins un chiffre strictement supérieur à 2 ». Alors $\bar{A}$ est l'événement « On n'obtient que des 1 ou des 2 ». Au lieu de calculer $p(A)$, on calcule $p\left(\bar{A}\right)$ car $\bar{A}$ contient moins d'éventualités que A. On a $\bar{A} = \{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$ donc $p(\bar{A}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, on en déduit que $p(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.