Équations de droites du plan

I. Équations cartésiennes d'une droite dans le plan

1) Principe

Définition

Une **équation de droite** est une égalité vérifiée par les coordonnées de tous les points de cette droite et seulement par ceux-là.

Exemple 1

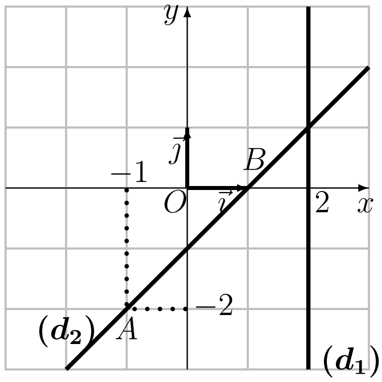
Les points de (d_1) ont un x égal à 2 et un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ se trouve sur (d_1) seulement si $x = 2$: on dit que (d_1) *a pour équation* $x = 2$. Ainsi, $A \notin (d_1)$ car $x_A = -1 \neq 2$.

De même, dire que (d_2) a pour équation $x - y = 1$ veut dire que tout point de coordonnées $(x\,;\,y)$ doit vérifier l'égalité $x - y = 1$ pour être sur (d_2). Par exemple :

si $A\,(-1\,;\,-2)$ alors $x_A - y_A = -1 - (-2) = 1$ donc $A \in (d_2)$;

si $B\,(1\,;\,0)$ alors $x_B - y_B = 1 - 0 = 1$ donc $B \in (d_2)$;

si $C\,(7\,;\,5)$ alors $x_C - y_C = 7 - 5 = 2 \neq 1$ donc $C \notin (d_2)$.



2) Équations cartésiennes d'une droite

Propriété 1

Toute droite du plan a des **équations cartésiennes**, de la forme $\boxed{a\,x + b\,y + c = 0}$ où a, b, c sont des constantes telles que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Démonstration :

Soit d une droite passant et $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points de cette droite.
Soit $M\ (x\,;\,y)$ un point quelconque.

$M\ (x\,;\,y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \iff \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \iff (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$

$\iff -(y_B - y_A)x + (x_B - x_A)y - y_A(x_B - x_A) + x_A(y_B - y_A) = 0 \iff ax + by + c = 0$

où $a = -(y_B - y_A)$; $b = (x_B - x_A)$; $c = -y_A(x_B - x_A) + x_A(y_B - y_A)$. $\diamond$

Remarques

– on peut multiplier ou diviser une équation cartésienne par un nombre non nul quelconque : une droite a donc une infinité d'équations cartésiennes ;

– si $a = 0$ alors la droite est horizontale ; si $b = 0$ alors la droite est verticale ;

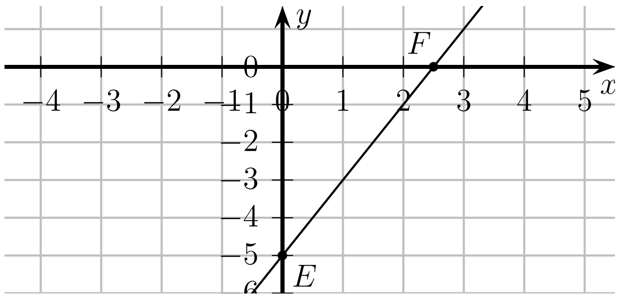
– on écrira par exemple $d : 2x+3y-8 = 0$ pour signifier que la droite d a pour équation $2x+3y-8 = 0$.

Vérifier qu'une équation cartésienne est correcte.
Il suffit de remplacer x et y par les coordonnées de deux points et de voir si l'équation est à chaque fois vérifiée.

Exemple 2
La droite (AB) de l'exemple 1, où $A\ (-4\,;\,1)$ et $B\ (4\,;\,3)$ a-t-elle pour équation $2\,x - y - 5 = 0$?
Réponse : $2x_A - y_A - 5 = 2(-4) - 1 - 5 = -14 \neq 0$ donc $2\,x - y - 5 = 0$ n'est pas une équation de (AB) (bien sûr, si les coordonnées de A avaient vérifié l'équation, il aurait fallu tester celles de B).

Tracer une droite connaissant une équation cartésienne.
Je trouve deux points de la droite en choisissant deux valeurs de x ou y et je calcule à chaque fois l'autre coordonnée.

Exemple 3
Tracer la droite d'équation $2x - y - 5 = 0$.
Réponse :
si je choisis $x = 0$ alors $2 \times 0 - y - 5 = 0$ donc $y = -5$: la droite passe par $E\ (0\,;\,-5)$;
si je choisis $y = 0$ alors $2x - 0 - 5 = 0$ donc $x = 5/2$: la droite passe par $F\ (5/2\,;\,0)$.



Trouver l'ordonnée d'un point d'une droite connaissant l'abscisse du point (ou le contraire).
Même principe que pour tracer la droite : il suffit de remplacer la coordonnée connue par sa valeur dans l'équation de droite puis de résoudre l'équation obtenue.

Exemple 4
Soit (d) : $-5\,x + 2\,y - 4 = 0$. Trouver l'abscisse du point de (d) d'ordonnée 6.
Réponse :
Ici, on me donne le y du point et on me demande de trouver son x.
Je remplace alors y par 6 dans l'équation de (d) : $-5\,x + 2 \times 6 - 4 = 0$ donc $-5\,x + 8 = 0$ ce qui donne $x = \dfrac{-8}{-5} = \dfrac{8}{5}$.

Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de deux points A et B.

① je calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ (où M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$) ;

② j'écris le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$;

③ je développe ce déterminant et j'écris qu'il doit être nul pour que $M\ (x\,;\,y) \in (AB)$.

Exemple 5

Trouvez une équation cartésienne de la droite (AB) de l'exemple 1, où $A\ (-4\,;\,1)$ et $B\ (4\,;\,3)$.

Réponse :

① $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix}$;

② $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right) = \begin{vmatrix} 8 & x+4 \\ 2 & y-1 \end{vmatrix}$;

③ $M\ (x\,;\,y) \in (AB) \iff 8(y-1) - 2(x+4) = 0 \iff -2\,x + 8\,y - 16 = 0 \iff x - 4\,y + 8 = 0.$

Remarque

Pensez à vérifier cette équation avec les coordonnées de A et de B ou avec Geogebra.

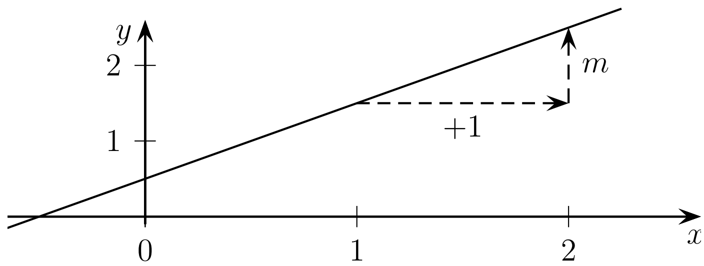
II. Équation réduite d'une droite dans le plan

Pour alléger ce cours, les droites parallèles à l'axe des abscisses seront appelées horizontales et les droites parallèles à l'axe des ordonnées seront appelées verticales.

1) Pente (coefficient directeur) d'une droite

Définition

La **pente** m (ou le **coefficient directeur**) d'une droite, si elle existe, est le déplacement vertical correspondant à un déplacement horizontal de $+1$.



Remarque

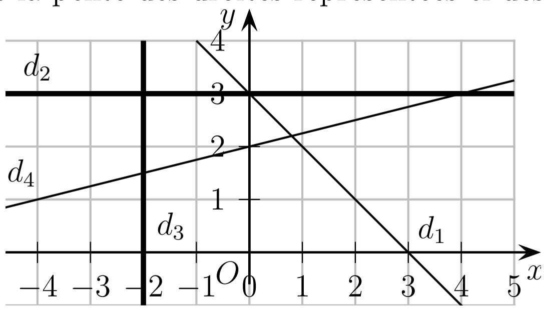
Les droites parallèles à l'axe des ordonnées (les droites verticales en général) n'ont pas de pente.

Déterminer la pente d'une droite donnée par une représentation graphique.

Il suffit d'avancer d'une unité vers la droite et de trouver le déplacement vertical nécessaire pour « retrouver » la droite.

Exemple 6

Trouvez par lecture graphique la pente des droites représentées ci-dessous :



Réponse : $m_1 = -1$; $m_2 = 0$; m_3 n'existe pas et $m_4 \simeq 0{,}2$.

Propriété 2

La pente d'une droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Exemple 7

Calculez, si possible, les pentes de (MN) et (MP) quand $M\ (-1\,;\,2)$, $N\ (-1\,;\,-3)$ et $P\ (2\,;\,-4)$.

Réponse :

$x_M = x_N$ donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées donc n'a pas de pente.

$x_M \neq x_P$ donc la droite (MP) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc a une pente :

$m = \dfrac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \dfrac{-6}{3} = -2.$

Remarque

Une droite de pente positive « monte » et une droite de pente négative « descend ».

2) Équation réduite d'une droite

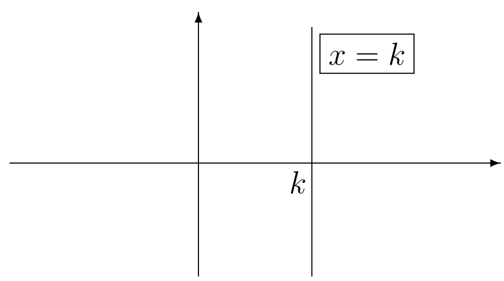
a) Droites parallèles à l'axe des ordonnées (« verticales »)

Soit $a\,x + b\,y + c = 0$ une équation cartésienne de droite.

Si $b = 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation peut s'écrire $a\,x + c = 0$ ou encore $x = -\dfrac{c}{a} = k$ (a ne peut être nul car b l'est déjà).

Propriété 3

Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une **équation réduite** de la forme $\boxed{x = k}$.



Exemple 8

La droite (d_3) de l'exemple 6 a pour équation réduite $x = -2$.

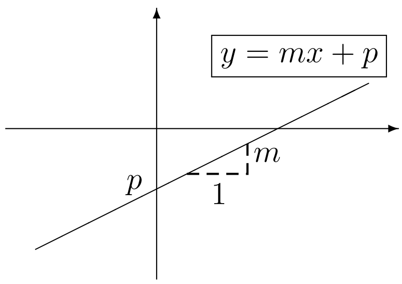
b) Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

Si $b \neq 0$ alors l'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ s'écrit $b\,y = -a\,x - c$ donc $y = -\dfrac{a}{b}\,x - \dfrac{c}{b}$.

Or (cf. démonstration de la propriété 1) $a = -(y_B - y_A)$ et $b = (x_B - x_A)$ donc $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{-(y_B - y_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$ (la pente de la droite).

Propriété 4

Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une **équation réduite** de la forme $\boxed{y = mx + p}$, où m est la pente de la droite.



Remarques

– le nombre p est appelé « ordonnée à l'origine » de la droite ;
– une droite d'équation $y = mx + p$ est la courbe de la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Exemple 9

D'après l'exemple 5, la droite de l'exemple 1 a pour *équation cartésienne* $x - 4\,y + 8 = 0$. Cette équation peut aussi s'écrire $x + 8 = 4\,y$ donc $y = \dfrac{1}{4}\,x + 2$, qui est l'*équation réduite* de la droite.

Déterminer la pente d'une droite donnée par une équation.
La pente d'une droite est le coefficient de x dans *l'équation réduite*.

Exemple 10

Donnez les pentes (les coefficients directeurs) des droites $d_1 : y = -3\,x + 2$; $d_2 : x = -2$ et $d_3 : x - 4\,y + 8 = 0$.
Réponse :
– l'équation de $d_1 : y = -3\,x + 2$ est sous forme réduite $(y = mx + p)$ donc sa pente est $m_1 = -3$;
– l'équation de $d_2 : x = -2$ est sous forme réduite $(x = k)$ et d_2 n'a pas de pente ;
– l'équation de $d_3 : x - 4\,y + 8 = 0$ est sous forme cartésienne, son équation réduite est $y = \dfrac{1}{4}\,x + 2$ donc sa pente est $m_3 = \dfrac{1}{4}$.

Tracer une droite connaissant son équation réduite.
Quand l'équation réduite est sous la forme $y = m\,x + p$, on choisit deux valeurs de x pour calculer les y correspondants.

Exemple 11

Tracer, dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, la droite (d_1) d'équation $x = -1$; (d_2) d'équation $y = 4$ et la droite (d_3) d'équation $y = -2\,x + 3$.

Réponse :
Pour (d_1) et (d_2), il n'y a pas de calcul à faire.

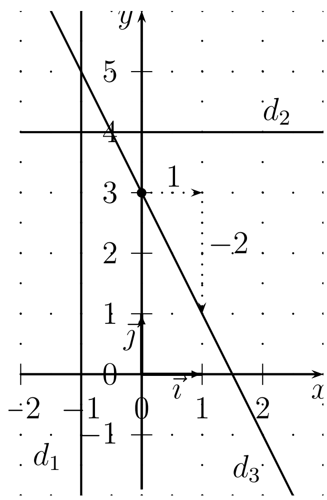
Pour (d_3), deux stratégies :

① soit faire un tableau de valeurs (les valeurs de x sont quelconques) :

x	-1	0	2
$y=-2x+3$	5	3	-1

ce qui nous donne trois points de la droite de coordonnées $(-1\,;5)$, $(0\,;3)$ et $(2\,;-1)$ (deux suffisaient).

② soit placer l'ordonnée à l'origine $p = 3$ puis avancer de 1 horizontalement et descendre de 2 verticalement (car $m = -2$).



Déterminer une équation réduite de droite à partir d'un point et du coefficient directeur
On remplace x et y par les coordonnées du point et m par sa valeur dans l'équation réduite pour trouver p.

Exemple 12

Trouvez l'équation réduite de la droite d passant par $A\ (-1\,;2)$ et de pente 4.
Réponse :
Comme $m = 4$, l'équation réduite est $y = 4\,x + p$; comme A appartient à d, nous trouvons $2 = 4(-1) + p$ donc $p = 6$. L'équation réduite de d est donc $y = 4\,x + 6$.

Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir de deux points
Calculer la pente, si elle existe, avec la propriété 3 puis procéder comme dans l'exemple précédent.

Exemple 13

Soient, dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, les points $A\ (-1\,;2)$, $B\ (-1\,;-3)$ et $C\ (2\,;-4)$.
Donnez les équations réduites des droites (AB) et (AC).

Réponses :
Pour la droite (AB) : $x_A = x_B = -1$ donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation réduite s'écrit $x = k$, c'est-à-dire, ici, $x = -1$.

Pour la droite (AC) : $x_A \neq x_C$ donc la droite (AC) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Sa pente est $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-6}{3} = -2$; l'équation de la droite (AC) s'écrit alors $y = -2\,x + p$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou de C) : $2 = -2 \times (-1) + p$ donc $p = 0$.
L'équation réduite de la droite (AC) est donc $y = -2\,x$.