Intersection de deux droites, systèmes linéaires

Dans ce chapitre, nous cherchons à savoir si deux droites sont sécantes puis, dans ce cas, à calculer les coordonnées de leur point d'intersection et voyons comment cela sert à résoudre des problèmes.

I. Droites parallèles

Définition

Deux droites sont **sécantes** si elles ont un point d'intersection et un seul.

Remarque

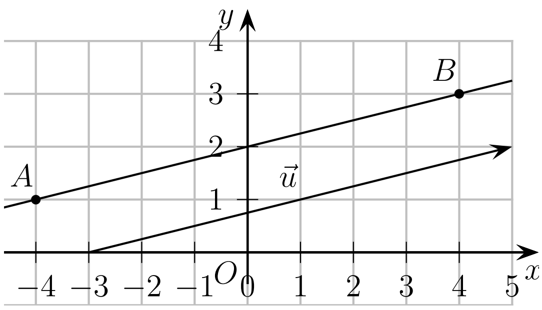
Deux droites du même plan peuvent être soit parallèles, soit confondues, soit sécantes.

1) En utilisant les équations cartésiennes

a) Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d s'il existe deux points A et B de d tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Comment trouver un vecteur directeur d'une droite passant par deux points A et B.

Il suffit de calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 1

La droite ci-dessus, passant par les points $A\ (-4\,;\,1)$ et $B\ (4\,;\,3)$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Remarques

– au vu de la définition, il est évident que toute droite a au moins un vecteur directeur et même qu'une droite a une infinité de vecteurs directeurs ;
– une droite peut être définie soit par deux points, soit par un point et un de ses vecteurs directeurs.

Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

① j'écris les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ (où M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$) dans un déterminant ;

② je développe ce déterminant et j'écris qu'il doit être nul.

Exemple 1

Trouvez une équation cartésienne de la droite passant par $A\ (-4\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

Réponse :

$M\ (x\,;\,y) \in d \iff \vec{u}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-1\end{pmatrix} \iff \det(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix}8 & x+4\\2 & y-1\end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix}8 & x+4\\2 & y-1\end{vmatrix} = 0 \iff 8(y-1) - 2(x+4) = 0 \iff 8\,y - 8 - 2\,x - 8 = 0$

$\iff -2\,x + 8\,y - 16 = 0 \iff x - 4\,y + 8 = 0.$

b) Lien entre les équations cartésiennes et les vecteurs directeurs

Propriété 1

Le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $a\,x + b\,y + c = 0$.

Déterminer un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation.

Il suffit d'utiliser la propriété 1.

Exemple 2

Soit d la droite d'équation $4\,x + 7\,y - 8 = 0$. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ (deuxième façon).

① les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ permettent de trouver les valeurs de a et b ;

② on trouve c en remplaçant x et y par les coordonnées de A dans l'équation cartésienne.

Exemple 1

Retrouvez une équation cartésienne de la droite de l'exemple 1.

Réponse :

① d'après la propriété 1, nous pouvons écrire que $-b = 8$ et $a = 2$ donc $a = 2$ et $b = -8$ donc une équation de la droite s'écrit $2\,x - 8\,y + c = 0$;

② en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on trouve : $2(-4) - 8(1) + c = 0$ donc $c = 16$.

Une équation de la droite est donc $2\,x - 8\,y + 16 = 0$ ou encore $x - 4\,y + 8 = 0$.

c) Droites parallèles

Propriété 2

$d : a\,x + b\,y + c = 0$ et $d' : a'\,x + b'\,y + c' = 0$ sont sécantes si et seulement si $\boxed{\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} \neq 0}$.

Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
Il suffit de calculer le déterminant de deux vecteurs directeurs.

Remarque

Ceci est équivalent également à $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exemple 3

Les droites $d : 2\,x - 8\,y - 1 = 0$ et $d' : -3\,x + 12\,y - 5 = 0$ sont-elles sécantes ?
Réponse :
$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times 12 - (-3) \times (-8) = 24 - 24 = 0$ donc d et d' ne sont pas sécantes.

2) En utilisant les équations réduites

Pour rappel, une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $y = m\,x + p$.

Propriété 3

Deux droites d et d' de pentes respectives m et m' sont sécantes si et seulement si $\boxed{m \neq m'}$.

Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
Il suffit de comparer les pentes, donc les coefficients de x dans les équations réduites.

Exemple 4

Les droites $d : y = 5 - 3\,x$ et $d' : y = x + 2$ sont-elles sécantes ?
Réponse :
La pente de d est -3 ; celle de d' est 1 (car $x + 2 = 1\,x + 2$) donc d et d' n'ont pas la même pente, elles sont sécantes.

II. Intersection de deux droites sécantes

1) Avec des équations réduites

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes avec leur équations réduites.

Utiliser la méthode par comparaison.

Exemple 5

Justifiez que les droites d : $y = -2\,x + 3$ et d' : $y = \dfrac{1}{3}\,x - \dfrac{5}{3}$ sont sécantes et trouvez les coordonnées de leur point d'intersection P.

Réponse :

Les droites d et d' n'ont pas le même coefficient directeur (car $-2 \neq \dfrac{1}{3}$) donc sont sécantes.

P vérifie les deux équations donc $y_P = -2\,x_P + 3$ et $y_P = \dfrac{1}{3}\,x_P - \dfrac{5}{3}$ donc $-2\,x_P + 3 = \dfrac{1}{3}\,x_P - \dfrac{5}{3}$, ce qui donne $-\dfrac{7}{3}\,x_P = -\dfrac{14}{3}$ d'où $7\,x_P = 14$ donc $x_P = 2$.

Puis je remplace x_P par 2 dans une équation : $y_P = -2 \times 2 + 3 = -1$.

Le point d'intersection de d et d' est donc $P\ (2\,;\,-1)$.

2) Avec des équations cartésiennes

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes avec leurs équations cartésiennes.

Utiliser la méthode par combinaisons linéaires.

Exemple 6

Trouvez les coordonnées du point d'intersection P des droites d : $2\,x+y-3 = 0$ et d' : $-x+3\,y+5 = 0$.

Réponse : je multiplie les équations par des coefficients bien choisis pour avoir le même coefficient (ou des opposés) devant x (ou devant y).

$\begin{cases} 2\,x + y - 3 = 0 \\ -x + 3\,y + 5 = 0 \quad \boxed{\times 2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x + y - 3 = 0 \\ -2\,x + 6\,y + 10 = 0 \end{cases}$ d'où, en ajoutant les deux lignes :

$7\,y + 7 = 0$ donc $y = -1$ puis je remplace dans une équation et je trouve $x = 2$. Donc $P\ (2\,;\,-1)$.

3) Avec une équation réduite et une équation cartésienne

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes avec une équation réduite et une équation cartésienne.

Utiliser la méthode par substitution.

Exemple 7

Trouvez les coordonnées du point d'intersection P des droites $d : y = -2\,x+3$ et $d' : -x+3\,y+5 = 0$.
Réponse : je remplace y par $-2\,x+3$ dans la seconde équation :
$\left\{\begin{array}{l} \boxed{y} = \boxed{-2\,x+3} \\ -x+3\boxed{y} = -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -2\,x+3 \\ -x+3(-2\,x+3) = -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -2x+3 \\ -x-6x+9 = -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -2\,x+3 \\ -7\,x = -14 \end{array}\right.$
donc $x = 2$ d'où $y = -2 \times 2 + 3 = -1$.
Donc $P\ (2\,;\,-1)$.

III. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Définitions

Un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** s'écrit : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} a\,x+b\,y = c \\ a'\,x+b'\,y = c' \end{array}\right.}$
où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes telles que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\,b') \neq (0\,;\,0)$.
Une **solution** du système est un couple $(x\,;\,y)$ vérifiant les deux équations.
Résoudre le système veut dire trouver tous les couples solutions.

Remarques

– les systèmes d'équations permettent de résoudre certains problèmes de la vie courante ;
– chacune des deux équations du système correspond à une droite ; résoudre le système revient donc à chercher les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection des deux droites, s'il(s) existe(nt).

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Utiliser une des trois méthodes vues précédemment : par **substitution**, par **comparaison** ou par **combinaisons linéaires**.

Exemple 8

Un carton contient des calculatrices de deux modèles. Le modèle A pèse 167 g et coûte 71 euros ; le modèle B pèse 198 g et coûte 83 euros. Le carton a coûté 3067 euros et pèse 7,25 kgs.
Combien de calculatrices de chaque sorte comporte-il ?

Réponse :
Soit x le nombre de calculatrices de modèle A et y le nombre de calculatrices de modèle B.
Je traduis les contraintes du problème en équations : $\left\{\begin{array}{l} 71\,x+83\,y = 3067 \\ 167\,x+198\,y = 7250 \end{array}\right.$.
Enfin, je résous le système (ici en multipliant la première par 167 et la seconde par 71) :
$\left\{\begin{array}{l} 71\,x+83\,y = 3067 \\ 167\,x+198\,y = 7250 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 11857\,x+13861\,y = 512189 \\ 11857\,x+14058\,y = 514750 \end{array}\right.$ d'où, en soustrayant les deux lignes :
$-197\,y = -2561$ donc $y = \dfrac{-\,2561}{-\,197} = 13$ puis je remplace pour trouver $x = 28$: il y a 28 calculatrices de modèle A et 13 calculatrices de modèle B.