Vecteurs colinéaires

Y. Moncheaux

Février 2023

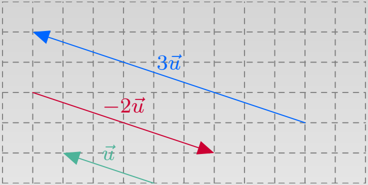
Table des matières

Ne pas noter

Quelques rappels pour commencer

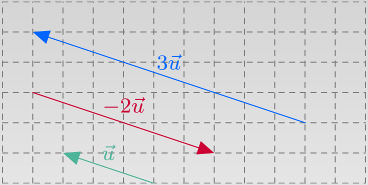
Ne pas noter

Quelques rappels pour commencer



Ne pas noter

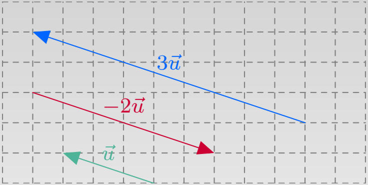
Quelques rappels pour commencer



Remarques

Ne pas noter

Quelques rappels pour commencer

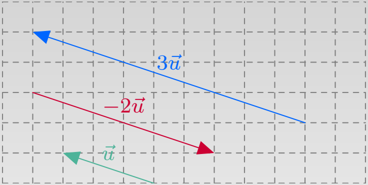


Remarques

- Le vecteur $k.\vec{u}$ est « parallèle » à $\vec{u}$.

Ne pas noter

Quelques rappels pour commencer

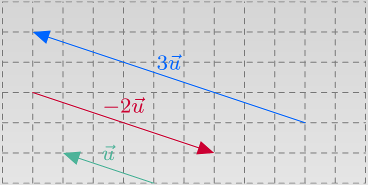


Remarques

- Le vecteur $k.\vec{u}$ est « parallèle » à $\vec{u}$.
- Si $k > 0$ alors $k.\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$.

Ne pas noter

Quelques rappels pour commencer



Remarques

- Le vecteur $k.\vec{u}$ est « parallèle » à $\vec{u}$.
- Si $k > 0$ alors $k.\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$.
- Si $k < 0$ alors $k.\vec{u}$ a le sens contraire à celui de $\vec{u}$.

Ne pas noter

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel.

Ne pas noter

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel.

Alors $k.\vec{u}\begin{pmatrix} kX \\ kY \end{pmatrix}$.

Ne pas noter

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel.

Alors $k.\vec{u}\begin{pmatrix} kX \\ kY \end{pmatrix}$.

Exemple 1

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ alors $3\vec{u}\begin{pmatrix} -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $-2\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Ne pas noter

(D) Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Ne pas noter

Ⓓ Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

Le vecteur nul est considéré comme colinéaire à tous les vecteurs car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc s'il existe un nombre k tel que $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc s'il existe un nombre k tel que $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$

Exemple 2

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc s'il existe un nombre k tel que $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$

Exemple 2

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc s'il existe un nombre k tel que $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$

Exemple 2

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car
$-8 = -2 \times 4$ mais $5 \neq -2 \times (-3)$.

I – Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient, dans une base orthonormée, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$.

I – Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient, dans une base orthonormée, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}X & X'\\Y & Y'\end{vmatrix} = XY' - YX'.$$

Exemple 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

Exemple 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$\det(\vec{u};\vec{v}) =$

Exemple 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Exemple 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (-3) \times (-5)$$

Exemple 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (-3) \times (-5) = -17.$$

Questions rapides (ne pas noter)

Calculer le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$:

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Questions rapides (ne pas noter)

Calculer le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$.

Ne pas noter

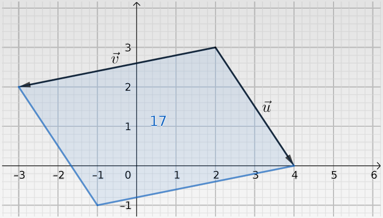
Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est, en valeur absolue, l'aire d'un parallélogramme « formé » par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ne pas noter

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est, en valeur absolue, l'aire d'un parallélogramme « formé » par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans l'exemple précédent, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$\det(\vec{u};\vec{v}) = -17$ donc l'aire est 17.



Partie exercices

Exercices 56, 61 page 127

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Ne pas noter

Démonstration

Supposons que $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Si l'un des vecteurs est nul, par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $XY' - X'Y = 0 \times Y' - X' \times 0 = 0$.

Sinon il existe k tel que $X' = kX$ et $Y' = kY$ donc $\det(\vec{u}; \vec{v}) = XY' - YX' = X(kY) - Y(kX) = kXY - kXY = 0$.

Démonstration

Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc que $XY' - YX' = 0$, c'est-à-dire que $XY' = YX'$.

- si $X = 0$ alors $XY' = 0$ donc $YX' = 0$ donc $Y = 0$ ou $X' = 0$;
  - si $Y = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ qui est colinéaire à tout vecteur ;
  - si $X' = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires
- le même raisonnement s'applique si $Y = 0$;
- si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ alors $XY' = YX'$, devient, en divisant par X et par Y : $\dfrac{Y'}{Y} = \dfrac{X'}{X}$. Appelons k cette fraction, on a alors : $X' = kX$ et $Y' = kY$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & 6\\-1 & -2\end{vmatrix} = 3\times(-2)-(-1)\times 6 = -6+6=0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & 6\\-1 & -2\end{vmatrix} = 3\times(-2)-(-1)\times 6 = -6+6 = 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

• on a $6\div 3 = 2$ et $(-2)\div(-1) = 2$ donc $\vec{v} = 2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & -2\\-6 & 4\end{vmatrix} = 3\times 4-(-6)\times(-2) = 12-12 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & -2\\-6 & 4\end{vmatrix} = 3\times 4 - (-6)\times(-2) = 12 - 12 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

• on a $(-2)\div 3 = -\dfrac{2}{3}$ et $4\div(-6) = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ donc $\vec{v} = -\dfrac{2}{3}\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 8\\0 & 1\end{vmatrix} = 4\times 1 - 0\times 8 = 4 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;

Questions rapides (ne pas noter)

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Deux rédactions possibles :

• $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 8\\0 & 1\end{vmatrix} = 4\times 1 - 0\times 8 = 4 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car $0\times k = 0 \neq 1$ pour tout réel k.

Partie exercices

Exercice 70 page 129
Exercices 57, 58 page 127

Ne pas noter

Propriété

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$ dans un repère quelconque. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

Remarques

– retenez l'expression « extrèmité moins origine » ;
– pensez à vérifier les coordonnées du vecteur par lecture graphique.

II – Applications de la colinéarité

1) Parallélisme

Propriété

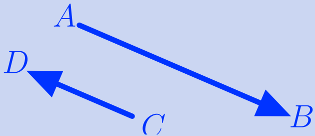
(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

II – Applications de la colinéarité

1) Parallélisme

Propriété

(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Exemple 4

Soient, dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, les points $A\ (-1\,;\,2)$, $B\ (5\,;\,4)$, $C\ (5\,;\,-1)$, $D\ (2\,;\,-2)$.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

2) Alignement

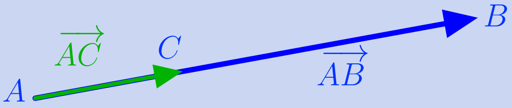
Propriété

A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2) Alignement

Propriété

A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Exemple 5

Soient, dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, les points $A\,(-2\,;\,1)$, $B\,(1\,;\,3)$, $C\,(7\,;\,7)$.
Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Partie exercices

Exercice 59, 60 page 127
Exercices 94, 93 page 133