Variations d'une fonction (2)

Y. Moncheaux

Juin 2022

Table des matières

Ne pas noter

Rappels

Ⓓ Le tableau de variations d'une fonction f, définie sur un ensemble D, décrit l'évolution de $f(x)$ quand x varie dans D.

Ne pas noter

Rappels

Ⓓ Le tableau de variations d'une fonction f, définie sur un ensemble D, décrit l'évolution de $f(x)$ quand x varie dans D.

Exemple 1

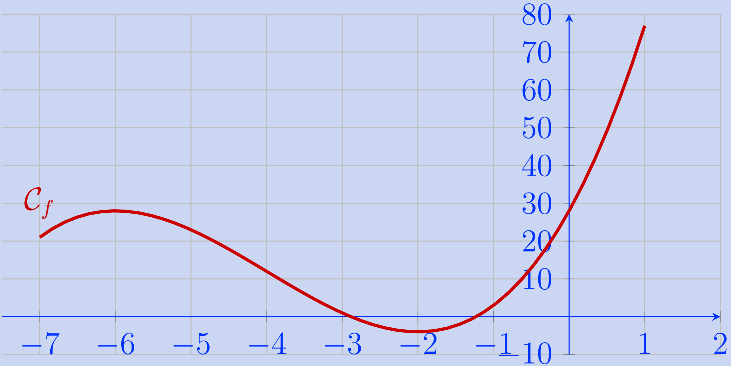
Par lecture graphique, donner le tableau de variations de f, définie sur $[-7\,;\,1]$ par

$$f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 28.$$

Ne pas noter

Réponse

Courbe de f :



Ne pas noter

Réponse

Le tableau de variation semble être :

x	-7		-6		-2		1
Variations de f	21	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$	77

Ne pas noter

Réponse

Le tableau de variation semble être :

x	-7	-6	-2	1
Variations de f	21	28	-4	77

La fonction f semble être croissante sur $[-7\,;\,-6]$; décroissante sur $[-6\,;\,-2]$; croissante sur $[-2\,;\,1]$.

Ne pas noter

Rappel : une fonction est croissante si elle conserve l'ordre et décroissante si elle change l'ordre.

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Ne pas noter

Cas des fonctions affines

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a \geqslant 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ne pas noter

Cas des fonctions affines

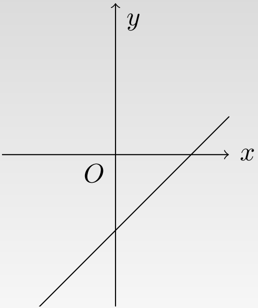
Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a \geqslant 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a \leqslant 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

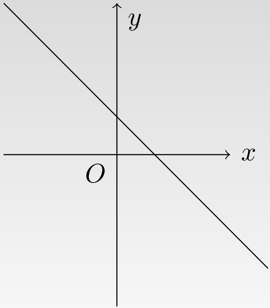
Ne pas noter

Retenir les deux cas :

$a > 0$



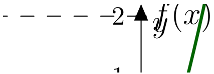
$a < 0$

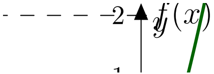


II – Maximum, minimum d'une fonction

II – Maximum, minimum d’une fonction

Ⓓ $f(u)$ est le maximum de f sur D si, pour tout x de D, on a $f(x) \leqslant f(u)$.


2
f(x)



Ⓓ $f(u)$ est le minimum de f sur D si, pour tout x de D, on a $f(x) \geqslant f(u)$.

Exemple 2

Avec la fonction f du paragraphe I (pour rappel :

x	-7		-6		-2		1
Variations de f	21	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$	77

), complétez :

Exemple 2

Avec la fonction f du paragraphe I (pour rappel :

x	-7		-6		-2		1
Variations de f	21	↗	28	↘	-4	↗	77

), complétez :

le maximum de f sur $[-7\,;\,1]$ est ......et il est atteint quand .... ;

Exemple 2

Avec la fonction f du paragraphe I (pour rappel :

x	-7	-6	-2	1
Variations de f	21 ↗	28 ↘	-4 ↗	77

), complétez :

le maximum de f sur $[-7\,;\,1]$ est . . . . . . et il est atteint quand . . . . ;

le maximum de f sur $[-7\,;\,-4]$ est . . . . . . et il est atteint quand . . . . ;

Exemple 2

Avec la fonction f du paragraphe I (pour rappel :

x	-7		-6		-2		1
Variations de f			28				77
	21	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

), complétez :

le maximum de f sur $[-7\,;\,1]$ est ......et il est atteint quand ....;

le maximum de f sur $[-7\,;\,-4]$ est ......et il est atteint quand ....;

le minimum de f est ......et il est atteint quand ....

Partie exercices

Exercices 44, 45, 46 page 242
Exercices 50 et 51 page 243

II – Taux d'accroissement

Exemple 3

Un vendeur touche un salaire mensuel $f(x)$ composé de deux parts :

– une part fixe de 1200 € ;

– une part variable, égale à 4 % du total des ventes réalisées.

On suppose que ce total x est compris entre 0 et 35000 euros.

Expression de $f(x)$: $f(x) = 1200 + \dfrac{4}{100} \times x = 1200 + 0,04x$.

Exemple 3

Accroissement du salaire en fonction de l'accroissement des ventes :

$\Delta x = 10000$ $\Delta x = 15000$

x	0	10000	20000	30000	35000
$y = f(x)$	1200	1600	2000	2400	2600

$\Delta y = 400$ $\Delta y = 600$

On constate sur ces deux valeurs que $\Delta y = 0,04\Delta x$ ou autrement dit que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.
L'accroissement du salaire semble proportionnel à l'accroissement des ventes.

Propriété

Soit une fonction f affine de coefficient a. Alors, pour tous les nombres u et v (distincts) :

$$\boxed{a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}}$$

Remarques :

- en notation physicienne : $\boxed{a = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}}$ et $\boxed{\Delta f = a \Delta x}$;
- l'augmentation de $f(x)$ est donc proportionnelle à celle de x ;
- seules les fonctions affines ont cette propriété.

Exemple 3

Dans l'exemple avec les salaires, on remarque que $f(x) = ax + b$ avec $a = 0,04$.
Si les ventes augmentent de 2000 €(donc $\Delta x = 2000$) alors l'augmentation de salaire est de $\Delta f = a\Delta x = 0,04 \times 2000 = 80$ euros.

Définition

Soit f une fonction et u, v deux nombres de l'ensemble de définition de f.

Alors le nombre $\tau = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ est appelé **taux d'accroissement** de f entre u et v.

Définition

Soit f une fonction et u, v deux nombres de l'ensemble de définition de f.

Alors le nombre $\tau = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ est appelé **taux d'accroissement** de f entre u et v.

C'est donc le coefficient directeur de la droite joignant les points de la courbe de f d'abscisses u et v.

Propriété

Une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si et seulement si $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0$ (respectivement ≤ 0) pour tous u et v de I.

Propriété

Une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si et seulement si $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0$ (respectivement ≤ 0) pour tous u et v de I.

Nous avons déjà vu que le signe du coefficient directeur indique si la droite « monte « ou « descend ».

Cette propriété permet de déterminer les variations de fonctions « simples ».

Cette propriété permet de déterminer les variations de fonctions « simples ».

Elle servira également de base à l'étude de variations de fonctions en classe de Première avec la notion de dérivée, centrale en mathématiques.

Exemple 4

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ définie sur $[\,-2\,;\,5\,]$.

Exemple 4

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ définie sur $[\,-2\,;\,5\,]$.
En traçant la courbe sur calculatrice, nous pouvons conjecturer que f est décroissante sur $[\,-2\,;\,2\,]$ et croissante sur $[\,2\,;\,5\,]$.

Exemple 4

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ définie sur $[-2\,;\,5]$.
En traçant la courbe sur calculatrice, nous pouvons conjecturer que f est décroissante sur $[-2\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,5]$.
Prouvons le en calculant τ :

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{(2u^2 - 8u + 3) - (2v^2 - 8v + 3)}{u - v} =$$

$$\frac{2(u^2 - v^2) - 8(u - v)}{u - v} = \frac{2(u - v)(u + v) - 8(u - v)}{u - v} =$$

$$2(u + v) - 8$$

Exemple 4

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ définie sur $[-2\,;\,5]$.

En traçant la courbe sur calculatrice, nous pouvons conjecturer que f est décroissante sur $[-2\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,5]$.

Prouvons le en calculant τ :

$\tau = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = \dfrac{(2u^2 - 8u + 3) - (2v^2 - 8v + 3)}{u - v} =$

$\dfrac{2(u^2 - v^2) - 8(u - v)}{u - v} = \dfrac{2(u - v)(u + v) - 8(u - v)}{u - v} =$

$2(u + v) - 8$

Si u et v sont supérieurs à 2 alors $2(u + v) - 8$ est positif et si u et v sont inférieurs à 2 alors $2(u + v) - 8$ est négatif.

Donc $\tau \leq 0$ sur $[-2\,;\,2]$ et $\tau \geq 0$ sur $[2\,;\,5]$, ce qui prouve la conjecture.

Exemple 4

On peut alors construire le tableau de variations de f :

x	-2		2		5
f	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$	7

III – Variations des fonctions de référence

1°) Sens de variation de la fonction carré

Propriété

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{u^2 - v^2}{u - v} = \frac{(u-v)(u+v)}{u - v} = u + v.$$

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{u^2 - v^2}{u - v} = \frac{(u-v)(u+v)}{u - v} = u + v.$$

Si u et v sont négatifs alors $u + v$ est négatif et si u et v sont positifs alors $u + v$ est positif.

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{u^2 - v^2}{u - v} = \frac{(u - v)(u + v)}{u - v} = u + v.$$

Si u et v sont négatifs alors $u + v$ est négatif et si u et v sont positifs alors $u + v$ est positif.

Donc $\tau \leqslant 0$ sur $\left]-\infty\,;\,0\right]$ et $\tau \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$, ce qui achève la démonstration.

2°) Sens de variation de la fonction racine carrée

Propriété

La fonction racine carrée est croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

$$\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & \\
\sqrt{x} & & \nearrow & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

Démonstration

Il est fréquent en mathématiques, quand une expression de la forme $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ apparaît, de la multiplier par $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ (l'« expression conjuguée ») pour utiliser la 3e identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Démonstration

Il est fréquent en mathématiques, quand une expression de la forme $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ apparaît, de la multiplier par $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ (l'« expression conjuguée ») pour utiliser la 3ᵉ identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{\sqrt{u} - \sqrt{v}}{u - v} = \frac{(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v})}{(u - v)(\sqrt{u} + \sqrt{v})} =$$
$$\frac{(\sqrt{u})^2 - (\sqrt{v})^2}{(u - v)(\sqrt{u} + \sqrt{v})} = \frac{u - v}{(u - v)(\sqrt{u} + \sqrt{v})} = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}.$$

Démonstration

Il est fréquent en mathématiques, quand une expression de la forme $\sqrt{u}-\sqrt{v}$ apparaît, de la multiplier par $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ (l'« expression conjuguée ») pour utiliser la 3e identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\tau = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{u-v} = \frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})(\sqrt{u}+\sqrt{v})}{(u-v)(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \frac{(\sqrt{u})^2-(\sqrt{v})^2}{(u-v)(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \frac{u-v}{(u-v)(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}.$$

Ce nombre est toujours positif, ce qui achève la démonstration.

3°) Sens de variation de la fonction cube

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
x^3	0	$\nearrow$	

Nous admettons cette propriété.

Ne pas noter

Pour les passionné(e)s, voici la démonstration de la croissance de la fonction cube.

Démonstration

La démonstration se base sur l'égalité :
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (développer ce qui est à droite du $=$ pour vérifier...).

Ne pas noter

Pour les passionné(e)s, voici la démonstration de la croissance de la fonction cube.

Démonstration

La démonstration se base sur l'égalité :
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (développer ce qui est à droite du $=$ pour vérifier...).

$$\tau = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{u^3-v^3}{u-v} = \frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{u-v} =$$
u^2+uv+v^2.

Ne pas noter

Pour les passionné(e)s, voici la démonstration de la croissance de la fonction cube.

Démonstration

La démonstration se base sur l'égalité :
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (développer ce qui est à droite du $=$ pour vérifier...).

$\tau = \dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} = \dfrac{u^3-v^3}{u-v} = \dfrac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{u-v} =$
u^2+uv+v^2.

Si u et v sont positifs alors u^2+uv+v^2 est positif.

Ne pas noter

Pour les passionné(e)s, voici la démonstration de la croissance de la fonction cube.

Démonstration

La démonstration se base sur l'égalité :
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (développer ce qui est à droite du $=$ pour vérifier...).

$$\tau = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{u^3-v^3}{u-v} = \frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{u-v} = u^2+uv+v^2.$$

Si u et v sont positifs alors u^2+uv+v^2 est positif.
Si u et v sont négatifs alors uv est positif (règle des signes) et un carré est positif donc u^2+uv+v^2 est positif.

4°) Sens de variation de la fonction inverse

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \frac{\frac{v}{uv} - \frac{u}{vu}}{u - v} = \frac{\frac{v-u}{uv}}{u - v} =$$

$$\frac{v - u}{uv} \times \frac{1}{u - v} = \frac{-1}{uv}.$$

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \frac{\frac{v}{uv} - \frac{u}{vu}}{u - v} = \frac{\frac{v-u}{uv}}{u - v} = \frac{v - u}{uv} \times \frac{1}{u - v} = \frac{-1}{uv}.$$

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \frac{\frac{v}{uv} - \frac{u}{vu}}{u - v} = \frac{\frac{v-u}{uv}}{u - v} =$$

$$\frac{v - u}{uv} \times \frac{1}{u - v} = \frac{-1}{uv}.$$

Si u et v sont positifs alors uv aussi et $\dfrac{-1}{uv}$ est négatif.

Démonstration

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \frac{\frac{v}{uv} - \frac{u}{vu}}{u - v} = \frac{\frac{v-u}{uv}}{u - v} =$$

$$\frac{v - u}{uv} \times \frac{1}{u - v} = \frac{-1}{uv}.$$

Si u et v sont positifs alors uv aussi et $\frac{-1}{uv}$ est négatif.

Si u et v sont négatifs alors uv est positif (règle des signes) et $\frac{-1}{uv}$ est négatif.

Démonstration

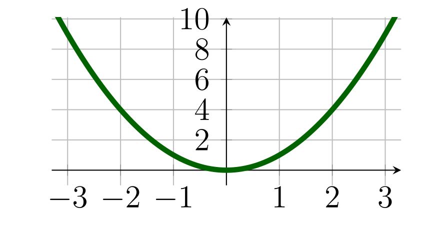
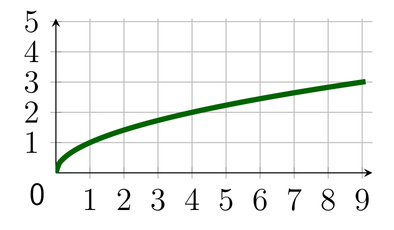
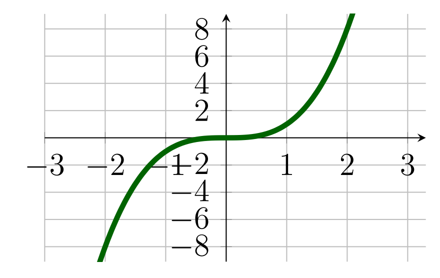
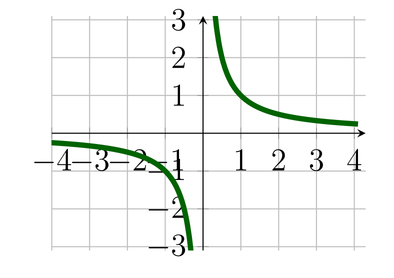
$\tau = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = \dfrac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \dfrac{\frac{v}{uv} - \frac{u}{vu}}{u - v} = \dfrac{\frac{v-u}{uv}}{u - v} =$

$\dfrac{v - u}{uv} \times \dfrac{1}{u - v} = \dfrac{-1}{uv}$.

Si u et v sont positifs alors uv aussi et $\dfrac{-1}{uv}$ est négatif.

Si u et v sont négatifs alors uv est positif (règle des signes) et $\dfrac{-1}{uv}$ est négatif.

Donc $\tau \leqslant 0$ sur $\left]-\infty\,;\,0\right[$ et sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$, ce qui achève la démonstration.

	
fonction carré	fonction racine carrée
	
fonction cube	fonction inverse

Partie exercices

Exercices 54 à 57 page 243