Les nombres réels

Y. Moncheaux

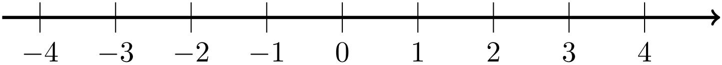
Septembre 2022

Table des matières

I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

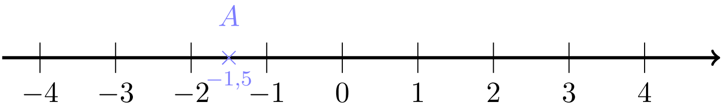
Ⓓ Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.



I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

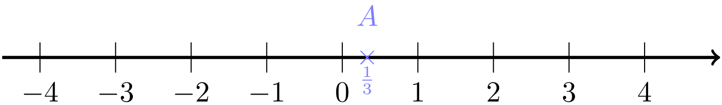
Ⓓ Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.



I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

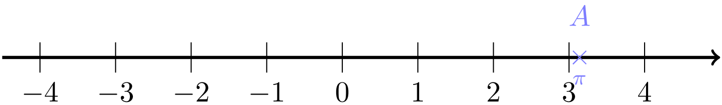
Ⓓ Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.



I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

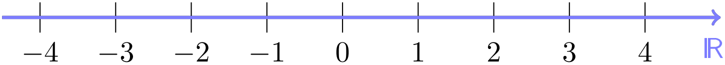
(D) Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.



I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

(D) Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.

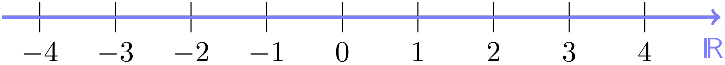


L'ensemble de toutes les abscisses possibles est noté $\mathbb{R}$ et appelé ensemble des réels.

I – Ensembles de nombres

1°) Les nombres réels

Ⓓ Tout point A d'un axe gradué peut être associé à un nombre unique, appelé abscisse de A.



L'ensemble de toutes les abscisses possibles est noté $\mathbb{R}$ et appelé ensemble des réels.

Ⓡ $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres positifs, $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres négatifs.

Ne pas noter

Différents types de nombres

Nous pouvons classifier les nombres réels suivant différentes catégories :

- les nombres entiers ;
- les nombres décimaux ;
- les nombres rationnels ;
- les nombres irrationnels.

Ne pas noter

Différents types de nombres

Nous pouvons classifier les nombres réels suivant différentes catégories :

- les nombres entiers ;
- les nombres décimaux ;
- les nombres rationnels ;
- les nombres irrationnels.

Ⓡ Il existe aussi, parmi les irrationels, des nombres transcendants mais cela est hors-programme...

2°) Les nombres entiers

(D) Un nombre entier est un nombre dont la partie décimale est nulle.

2°) Les nombres entiers

Ⓓ Un nombre entier est un nombre dont la partie décimale est nulle.

Exemple 1

0 ; 4 ; 57 ; -2 ; -84 sont des entiers.

$2{,}5$; $\dfrac{1}{3}$ ou π n'en sont pas.

Ⓓ Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

(D) Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

(D) Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

L'ensemble des entiers est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Ⓓ Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

L'ensemble des entiers est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Ⓡ L'ensemble $\mathbb{N}$ est contenu dans l'ensemble $\mathbb{Z}$; en mathématiques nous écrivons :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

($\mathbb{N}$ est *inclus* dans $\mathbb{Z}$).

3°) Les nombres décimaux

(D) Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers.

3°) Les nombres décimaux

Ⓓ Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers.

Exemple 2

$\frac{2}{10^3} = 0{,}002$; $\frac{314159}{10^5} = 3{,}14159$ ou $\frac{-159}{10^4} = -0{,}0159$ sont des nombres décimaux.

3°) Les nombres décimaux

(D) Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers.

Exemple 2

$\frac{2}{10^3} = 0{,}002\,;\ \frac{314159}{10^5} = 3{,}14159$ ou $\frac{-159}{10^4} = -0{,}0159$ sont des nombres décimaux.

(R) Une autre définition serait : un nombre décimal est un nombre qui n'a qu'un nombre fini de chiffres dans son développement décimal.

Ⓡ Encore une autre définition : un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{5^m \times 2^n}$ où a, m et n sont des entiers.

Ⓡ Encore une autre définition : un nombre décimal est un nombre qui s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{5^m \times 2^n}$ où a, m et n sont des entiers.

Exemples 3

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^2}$ est un décimal ;

$\dfrac{1}{125} = \dfrac{1}{5^3}$ est un décimal ;

$-\dfrac{7}{40} = \dfrac{-7}{5 \times 2^3}$ est un décimal ;

$\dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{3 \times 2^2}$ n'est pas un décimal.

Ⓡ Un nombre entier est un nombre décimal particulier, par exemple : $6 = 6{,}0 = \dfrac{60}{10^1}$.

Ⓡ Un nombre entier est un nombre décimal particulier, par exemple : $6 = 6{,}0 = \dfrac{60}{10^1}$.
Donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Ⓡ Un nombre entier est un nombre décimal particulier, par exemple : $6 = 6{,}0 = \dfrac{60}{10^1}$.
Donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Ⓡ Une question se pose : les réels (les abscisses des points d'une droite graduée) sont-ils tous des décimaux ?

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Démonstration

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Alors $10^n = 3\,a$.

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Alors $10^n = 3\,a$.

Mais a est un entier donc $3\,a$ est un entier multiple de 3.

Démonstration

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Alors $10^n = 3\,a$.

Mais a est un entier donc $3\,a$ est un entier multiple de 3.

Ce n'est pas le cas de 10^n (la somme des chiffres de 10^n est 1 donc elle n'est pas divisible par 3), d'où une contradiction.

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Alors $10^n = 3\,a$.

Mais a est un entier donc $3\,a$ est un entier multiple de 3.

Ce n'est pas le cas de 10^n (la somme des chiffres de 10^n est 1 donc elle n'est pas divisible par 3), d'où une contradiction.

Conclusion : le nombre $\dfrac{1}{3}$ ne peut pas être un décimal.

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Preuve : supposons que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec a et n entiers.

Alors $10^n = 3\,a$.

Mais a est un entier donc $3\,a$ est un entier multiple de 3.

Ce n'est pas le cas de 10^n (la somme des chiffres de 10^n est 1 donc elle n'est pas divisible par 3), d'où une contradiction.

Conclusion : le nombre $\dfrac{1}{3}$ ne peut pas être un décimal.

Ⓡ Ce résultat peut s'écrire ainsi : $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ($\dfrac{1}{3}$ n'appartient pas à l'ensemble des décimaux).

Ne pas noter

Ⓡ Le raisonnement utilisé est un raisonnement par l'absurde : pour prouver que quelque chose est fausse, nous supposons qu'elle est vraie et nous aboutissons à une incohérence.

Ne pas noter

Ⓡ Le raisonnement utilisé est un raisonnement par l'absurde : pour prouver que quelque chose est fausse, nous supposons qu'elle est vraie et nous aboutissons à une incohérence.

Ⓡ Voici les techniques de démonstrations existantes :

- raisonnement par déduction ;
- raisonnement par disjonction de cas ;
- raisonnement par l'absurde ;
- raisonnement par récurrence ;
- raisonnement par contraposition ;
- raisonnement par analyse-synthèse.

Ne pas noter

Ⓡ Le raisonnement utilisé est un raisonnement par l'absurde : pour prouver que quelque chose est fausse, nous supposons qu'elle est vraie et nous aboutissons à une incohérence.

Ⓡ Voici les techniques de démonstrations existantes :

- raisonnement par déduction ;
- raisonnement par disjonction de cas ;
- raisonnement par l'absurde ;
- raisonnement par récurrence ;
- raisonnement par contraposition ;
- raisonnement par analyse-synthèse.

Plus le raisonnement inductif qui ne permet que d'émettre des conjectures.

Ne pas noter

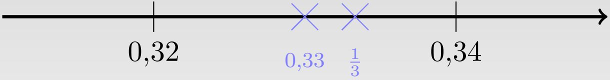
Ⓡ Attention : $\frac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,33 !

0,33 est un décimal (c'est $\frac{33}{10^2}$) tandis que $\frac{1}{3}$ n'en est pas un.

Ne pas noter

Ⓡ Attention : $\dfrac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,33 !

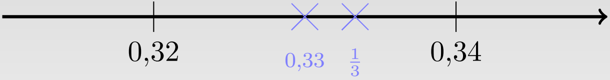
0,33 est un décimal (c'est $\dfrac{33}{10^2}$) tandis que $\dfrac{1}{3}$ n'en est pas un.



Ne pas noter

Ⓡ Attention : $\frac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,33 !

0,33 est un décimal (c'est $\frac{33}{10^2}$) tandis que $\frac{1}{3}$ n'en est pas un.



0,33 n'est qu'une valeur approchée de $\frac{1}{3}$: je peux écrire $\frac{1}{3} \simeq 0,33$ mais $\frac{1}{3} \neq 0,33$.

Partie exercices

Exercices 20, 22 et 30 page 26.

4°) Les nombres rationnels

Ⓓ Un nombre réel s'écrivant $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers (b non nul !) est un nombre rationnel.

4°) Les nombres rationnels

(D) Un nombre réel s'écrivant $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers (b non nul !) est un nombre rationnel.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

4°) Les nombres rationnels

(D) Un nombre réel s'écrivant $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers (b non nul !) est un nombre rationnel.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 4

$\frac{2}{7}$; $\frac{52}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{23}{8}$ sont des nombres rationnels.

Ne pas noter

® Il est possible de prouver que le développement décimal des nombres rationnels contient une répétition (ils ont un « mode d'emploi », d'où le nom de rationnel), par exemple :

$\dfrac{12}{37} = 0,324324324...$ ou $\dfrac{229}{55} = 4,1636363...$ etc.

Ne pas noter

Ⓡ Il est possible de prouver que le développement décimal des nombres rationnels contient une répétition (ils ont un « mode d'emploi », d'où le nom de rationnel), par exemple :
$\frac{12}{37} = 0,324324324...$ ou $\frac{229}{55} = 4,1636363...$ etc.

Ⓡ Un nombre décimal est un nombre rationnel. En effet, $\frac{a}{10^n}$ est bien de la forme $\frac{a}{b}$.

Ne pas noter

Ⓡ Il est possible de prouver que le développement décimal des nombres rationnels contient une répétition (ils ont un « mode d'emploi », d'où le nom de rationnel), par exemple :
$\frac{12}{37} = 0,324324324...$ ou $\frac{229}{55} = 4,1636363...$ etc.

Ⓡ Un nombre décimal est un nombre rationnel. En effet, $\frac{a}{10^n}$ est bien de la forme $\frac{a}{b}$.
L'ensemble $\mathbb{D}$ est donc contenu dans l'ensemble $\mathbb{Q}$: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Ne pas noter

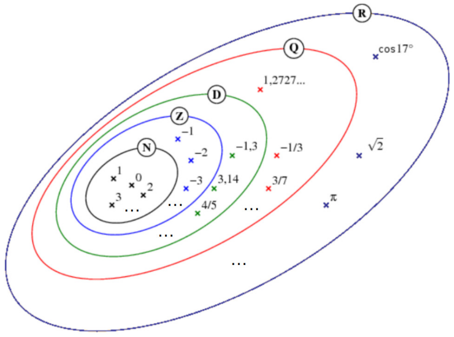
Ⓡ Les rationnels sont aussi des abscisses de points d'une droite graduée donc ce sont des réels particuliers : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ne pas noter

Ⓡ Les rationnels sont aussi des abscisses de points d'une droite graduée donc ce sont des réels particuliers : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Au final : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ne pas noter

Ⓡ Les rationnels sont aussi des abscisses de points d'une droite graduée donc ce sont des réels particuliers : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Au final : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



(source)

Ne pas noter

Le graphique précédent suggère qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (donc des *irrationnels*). Sauriez-vous en écrire un ?

Ne pas noter

Le graphique précédent suggère qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (donc des *irrationnels*). Sauriez-vous en écrire un ?

Il faut que le développement décimal ne se répète pas, ce qui est le cas de ce nombre : $0,1234567891011121314151617\ldots$ (admis).

Ne pas noter

Le graphique précédent suggère qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (donc des *irrationnels*). Sauriez-vous en écrire un ?

Il faut que le développement décimal ne se répète pas, ce qui est le cas de ce nombre : $0,1234567891011121314151617\ldots$ (admis).

Mais il existe « dans la nature » d'autres nombres irrationnels.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).

Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.

Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.
Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).
Par conséquent, $a = 2c$ où c est un entier et

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.
Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).
Par conséquent, $a = 2c$ où c est un entier et
$2b^2 = (2c)^2$ donc $2b^2 = 4c^2$ d'où $b^2 = 2c^2$.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.
Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).
Par conséquent, $a = 2c$ où c est un entier et $2b^2 = (2c)^2$ donc $2b^2 = 4c^2$ d'où $b^2 = 2c^2$.
De cette égalité, nous déduisons que b est pair.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.
Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).
Par conséquent, $a = 2c$ où c est un entier et
$2b^2 = (2c)^2$ donc $2b^2 = 4c^2$ d'où $b^2 = 2c^2$.
De cette égalité, nous déduisons que b est pair.
Conclusion : a et b sont pairs donc la fraction n'est pas irréductible : il y a contradiction avec les hypothèses.

Nombres irrationnels

Démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve : supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers non nuls et que la fraction est irréductible (non simplifiable).
Alors : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.
Le nombre $2b^2$ est pair donc a doit l'être aussi (le carré d'un nombre impair est impair, cela se démontre...).
Par conséquent, $a = 2c$ où c est un entier et
$2b^2 = (2c)^2$ donc $2b^2 = 4c^2$ d'où $b^2 = 2c^2$.
De cette égalité, nous déduisons que b est pair.
Conclusion : a et b sont pairs donc la fraction n'est pas irréductible : il y a contradiction avec les hypothèses.
Le nombre $\sqrt{2}$ est donc irrationnel !

Ne pas noter

Ⓡ Ceci s'écrit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ne pas noter

® Ceci s'écrit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

® La preuve de l'irrationalité de certaines racines carrées daterait d'environ le V^{e} siècle avant JC et pourrait être dûe à un élève de l'école Pythagoricienne.

Ne pas noter

Ⓡ Ceci s'écrit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ⓡ La preuve de l'irrationalité de certaines racines carrées daterait d'environ le V^{e} siècle avant JC et pourrait être dûe à un élève de l'école Pythagoricienne.

Ⓡ Il existe d'autres nombres irrationnels, tels que π (la démonstration est plus compliquée, trouvée en 1761 par Lambert).

Ne pas noter

Ⓡ Ceci s'écrit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ⓡ La preuve de l'irrationalité de certaines racines carrées daterait d'environ le Ve siècle avant JC et pourrait être dûe à un élève de l'école Pythagoricienne.

Ⓡ Il existe d'autres nombres irrationnels, tels que π (la démonstration est plus compliquée, trouvée en 1761 par Lambert). Il a été prouvé qu'il y a plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels !

Ne pas noter

Ⓡ Ceci s'écrit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ⓡ La preuve de l'irrationalité de certaines racines carrées daterait d'environ le V^{e} siècle avant JC et pourrait être dûe à un élève de l'école Pythagoricienne.

Ⓡ Il existe d'autres nombres irrationnels, tels que π (la démonstration est plus compliquée, trouvée en 1761 par Lambert). Il a été prouvé qu'il y a plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels !

Quelques vidéos qui ré-expliquent cette démonstration : vidéo1, vidéo2, vidéo3.

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \ldots \quad \mathbb{Q}$ b) $-2{,}1 \ldots \quad \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \ldots \quad \mathbb{Q}$ d) $\dfrac{4}{7} \ldots \quad \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$ b) $-2{,}1 \ldots \quad \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \ldots \quad \mathbb{Q}$ d) $\dfrac{4}{7} \ldots \quad \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$ b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \ldots \quad \mathbb{Q}$ d) $\dfrac{4}{7} \ldots \quad \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$

b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{4}{7} \ldots \quad \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \ldots \quad \mathbb{D}$

f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$

h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$

b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{4}{7} \notin \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \ldots \quad \mathbb{D}$

f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$

h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$

b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{4}{7} \notin \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \in \mathbb{D}$

f) $\dfrac{21}{11} \ldots \quad \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$

h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$ b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ d) $\dfrac{4}{7} \notin \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \in \mathbb{D}$ f) $\dfrac{21}{11} \in \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \ldots \quad \mathbb{D}$ h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$

b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{4}{7} \notin \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \in \mathbb{D}$

f) $\dfrac{21}{11} \in \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \in \mathbb{D}$

h) $\pi \ldots \quad \mathbb{R}$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $21 \in \mathbb{Q}$

b) $-2{,}1 \in \mathbb{D}$

c) $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{4}{7} \notin \mathbb{D}$

e) $\dfrac{3}{16} \in \mathbb{D}$

f) $\dfrac{21}{11} \in \mathbb{R}$

g) $\sqrt{16} \in \mathbb{D}$

h) $\pi \in \mathbb{R}$

Partie exercices

Exercices 2 et 4 page 23.
Exercices 18, 24, 25, 26 page 26.
Exercices 36, 37, 39, 42, 43 page 27.
Exercice 94 page 34.

II. Encadrements. Intervalles

1°) Encadrements

Parfois certains problèmes (en ingénierie, dans l'industrie...) mènent à la recherche d'un nombre difficile à déterminer.
Il est alors fréquent de chercher simplement une valeur approchée de ce nombre ou un encadrement.

II. Encadrements. Intervalles

1°) Encadrements

Parfois certains problèmes (en ingénierie, dans l'industrie...) mènent à la recherche d'un nombre difficile à déterminer.
Il est alors fréquent de chercher simplement une valeur approchée de ce nombre ou un encadrement.

Exemple 5

$1{,}28 < \dfrac{9}{7} < 1{,}29$ est un encadrement d'amplitude 0,01 (donc 10^{-2}) du nombre $\dfrac{9}{7}$ par deux nombres décimaux.

II. Encadrements. Intervalles

1°) Encadrements

Parfois certains problèmes (en ingénierie, dans l'industrie...) mènent à la recherche d'un nombre difficile à déterminer.
Il est alors fréquent de chercher simplement une valeur approchée de ce nombre ou un encadrement.

Exemple 5

$1{,}28 < \dfrac{9}{7} < 1{,}29$ est un encadrement d'amplitude 0,01 (donc 10^{-2}) du nombre $\dfrac{9}{7}$ par deux nombres décimaux.
Ici, $\dfrac{9}{7}$ est une valeur exacte tandis que $1{,}28$ et $1{,}29$ sont des valeurs approchées de $\dfrac{9}{7}$.

Exemple 6

Donnez un encadrement de π à 10^{-3} près.

Exemple 6

Donnez un encadrement de π à 10^{-3} près.
$\pi \simeq 3,1415926$ donc $3,141 < \pi < 3,142$ est un encadrement à 10^{-3} près du nombre π.

Partie exercices

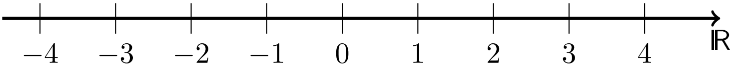
Sur la précision d'une approximation : exercice 5 fait ensemble puis 7 page 24.
Exercices 44, 46, 47, 49, 50, 51 page 28.
Exercice 102 page 35

2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

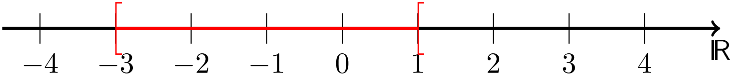
2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



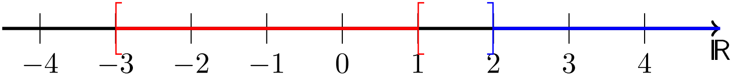
2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



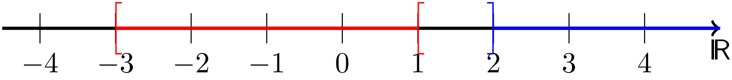
2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



2°) Intervalles

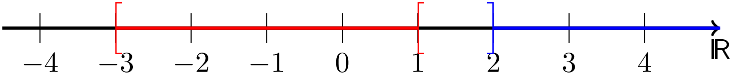
Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



Exemples 7

2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

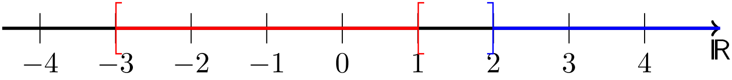


Exemples 7

$x \in [-3\,;\,1[\iff -3 \leqslant x < 1.$

2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



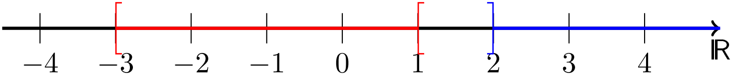
Exemples 7

$x \in [-3\,;\,1[\iff -3 \leqslant x < 1.$

$x \in \,]2\,;\,+\infty[\iff x > 2.$

2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



Exemples 7

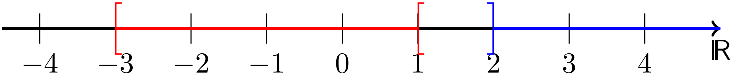
$x \in [-3\,;\,1[\iff -3 \leqslant x < 1.$

$x \in\ ]2\,;\,+\infty[\iff x > 2.$

Ⓡ L'intervalle $[-3\,;\,1[$ est fermé en -3 et ouvert en 1 : il contient -3 mais pas 1.

2°) Intervalles

Ⓓ Une partie en un seul morceau de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.



Exemples 7

$x \in [-3\,;\,1[\iff -3 \leqslant x < 1.$

$x \in \,]2\,;\,+\infty[\iff x > 2.$

Ⓡ L'intervalle $[-3\,;\,1[$ est fermé en -3 et ouvert en 1 : il contient -3 mais pas 1.

Ce qui s'écrit aussi : $-3 \in [-3\,;\,1[$ et $1 \notin [-3\,;\,1[$.

Ⓡ $\mathbb{R} = \,]-\infty\,;\,+\infty[\,.$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \ldots \quad [-2\,;\,7]$ b) $-2 \ldots \quad]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \ldots \quad]-2\,;\,7]$ d) $\pi \ldots \quad [2\,;\,3,14]$

e) $0 \ldots \quad [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots \quad]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots \quad [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots \quad [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \ldots\quad]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \ldots\quad]-2\,;\,7]$ d) $\pi \ldots\quad [2\,;\,3,14]$

e) $0 \ldots\quad [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots\quad]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots\quad [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots\quad [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \ldots\ ]-2\,;\,7]$ d) $\pi \ldots\ [2\,;\,3,14]$

e) $0 \ldots\ [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots\ ]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots\ [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots\ [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in\ ]-2\,;\,7]$ d) $\pi \ldots \quad [2\,;\,3,14]$

e) $0 \ldots \quad [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots \quad]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots \quad [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots \quad [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in\ ]-2\,;\,7]$ d) $\pi \notin [2\,;\,3,14]$

e) $0 \ldots\ [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots\ ]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots\ [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots\ [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in\ ]-2\,;\,7]$ d) $\pi \notin [2\,;\,3,14]$

e) $0 \notin [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \ldots\ ]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots\ [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots\ [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$ b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in\ ]-2\,;\,7]$ d) $\pi \notin [2\,;\,3,14]$

e) $0 \notin [1\,;\,+\infty[$ f) $2{,}3 \notin\ ]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \ldots\ [-4\,;\,1]$ h) $-5 \ldots\ [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$

b) $-2 \notin \,]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in \,]-2\,;\,7]$

d) $\pi \notin [2\,;\,3,14]$

e) $0 \notin [1\,;\,+\infty[$

f) $2{,}3 \notin \,]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \in [-4\,;\,1]$

h) $-5 \ldots \quad [-6\,;\,+\infty[$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez avec $\in$ ou $\notin$:

a) $5 \in [-2\,;\,7]$

b) $-2 \notin\ ]-2\,;\,7]$

c) $-1,99 \in\ ]-2\,;\,7]$

d) $\pi \notin [2\,;\,3,14]$

e) $0 \notin [1\,;\,+\infty[$

f) $2{,}3 \notin\ ]-\infty\,;\,2[$

g) $5^0 \in [-4\,;\,1]$

h) $-5 \in [-6\,;\,+\infty[$

Ne pas noter

Il y a huit types d'intervalles :

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	

Partie exercices

Exercice 6 fait ensemble puis 8 page 24.
Exercices 53, 57, 61 page 28.

III – Valeur absolue

1°) Définition

Ⓓ La valeur absolue d'un nombre a, notée $|a|$ est définie ainsi :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 8

$|8| = 8\,;\ |-3| = -(-3) = 3\,;$
$|3 - \pi| = -(3 - \pi) = -3 + \pi = \pi - 3.$

Ⓡ Une valeur absolue est donc toujours positive.

Partie exercices

Exercice 70 page 29

2°) Distance entre deux réels

Ⓓ La distance entre deux réels a et b est le nombre :

$$d(a;b) = |a-b|$$

2°) Distance entre deux réels

Ⓓ La distance entre deux réels a et b est le nombre :

$$d(a;b) = |a - b|$$

Exemples 9

$d(5;1) = |5-1| = |4| = 4$

2°) Distance entre deux réels

Ⓓ La distance entre deux réels a et b est le nombre :

$$d(a;b) = |a - b|$$

Exemples 9

$d(5;1) = |5-1| = |4| = 4$

$d(-2;6) = |-2-6| = |-8| = 8$

2°) Distance entre deux réels

Ⓓ La distance entre deux réels a et b est le nombre :

$$d(a;b) = |a - b|$$

Exemples 9

$d(5;1) = |5-1| = |4| = 4$

$d(-2;6) = |-2-6| = |-8| = 8$

$d(\pi;4) = |\pi-4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez :

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4, 9) = \dots$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4,9) = \dots$
Réponse : $d(4,9) = |4-9| = |-5| = 5$ (c'est bien la distance entre 4 et 9)

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4,9) = \dots$
Réponse : $d(4,9) = |4-9| = |-5| = 5$ (c'est bien la distance entre 4 et 9)

$d(8,-2) = \dots$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4,9) = \ldots$
Réponse : $d(4,9) = |4-9| = |-5| = 5$ (c'est bien la distance entre 4 et 9)

$d(8,-2) = \ldots$
Réponse : $d(8,-2) = |8-(-2)| = |10| = 10$ (c'est bien la distance entre 8 et -2)

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4,9) = \dots$
Réponse : $d(4,9) = |4-9| = |-5| = 5$ (c'est bien la distance entre 4 et 9)

$d(8,-2) = \dots$
Réponse : $d(8,-2) = |8-(-2)| = |10| = 10$ (c'est bien la distance entre 8 et -2)

$d(1,x) = \dots$

Questions rapides (ne pas noter)

Complétez : $d(4,9) = \dots$
Réponse : $d(4,9) = |4-9| = |-5| = 5$ (c'est bien la distance entre 4 et 9)

$d(8,-2) = \dots$
Réponse : $d(8,-2) = |8-(-2)| = |10| = 10$ (c'est bien la distance entre 8 et -2)

$d(1,x) = \dots$
Réponse : $d(1,x) = |1-x|$

Partie exercices

Exercices 65, 67, 69, 68 page 29.

3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

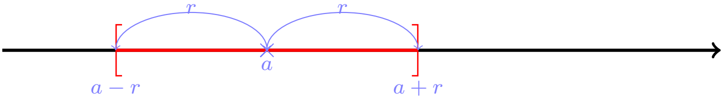
$$|x-a| \leqslant r \Longleftrightarrow d(x;a) \leqslant r \Longleftrightarrow x \in [\,a-r\,;\,a+r\,]$$

3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$|x-a| \leqslant r \iff d(x;a) \leqslant r \iff x \in [\,a-r\,;\,a+r\,]$$

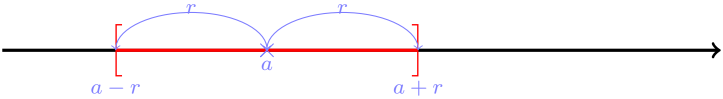


3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$|x-a| \leqslant r \iff d(x;a) \leqslant r \iff x \in [\,a-r\,;\,a+r\,]$$



Exemples 10

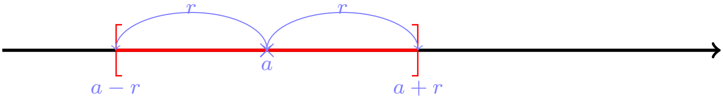
$$|x-3| \leqslant 2 \iff d(x;3) \leqslant 2 \iff x \in [\,1\,;\,5\,]$$

3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$|x - a| \leqslant r \iff d(x;a) \leqslant r \iff x \in [\,a - r\,;\,a + r\,]$$



Exemples 10

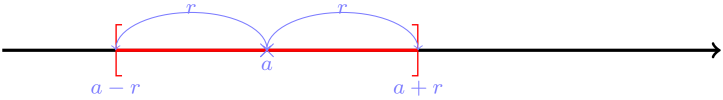
$$|x - 3| \leqslant 2 \iff d(x;3) \leqslant 2 \iff x \in [\,1\,;\,5\,]$$
$$|x - 1| < 5 \iff d(x;1) < 5 \iff x \in \,]-4\,;\,6\,[$$

3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$|x - a| \leqslant r \iff d(x;a) \leqslant r \iff x \in [\,a - r\,;\,a + r\,]$$



Exemples 10

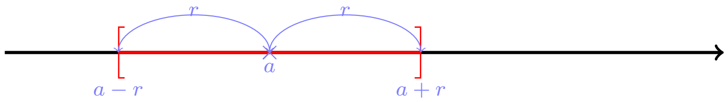
$$|x - 3| \leqslant 2 \iff d(x;3) \leqslant 2 \iff x \in [\,1\,;\,5\,]$$
$$|x - 1| < 5 \iff d(x;1) < 5 \iff x \in \,]\,{-4}\,;\,6\,[$$
$$|x + 2| \leqslant 6 \iff |x - (-2)| \leqslant 6$$
$$\iff d(x;-2) \leqslant 6 \iff x \in [\,{-8}\,;\,4\,]$$

3°) Valeur absolue et encadrement

Des inégalités sur les valeurs absolues peuvent être traduite en intervalles.

Ⓟ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$|x-a| \leqslant r \iff d(x;a) \leqslant r \iff x \in [\,a-r\,;\,a+r\,]$$



Exemples 10

$|x-3| \leqslant 2 \iff d(x;3) \leqslant 2 \iff x \in [\,1\,;\,5\,]$

$|x-1| < 5 \iff d(x;1) < 5 \iff x \in \,]-4\,;\,6\,[$

$|x+2| \leqslant 6 \iff |x-(-2)| \leqslant 6$

$\iff d(x;-2) \leqslant 6 \iff x \in [\,-8\,;\,4\,]$

$|x-4| \leqslant -2$: ceci est impossible (une valeur absolue est toujours positive)

Partie exercices

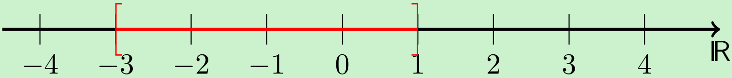
Exercices 72 b) et c) ; 73 a) et c) page 29

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

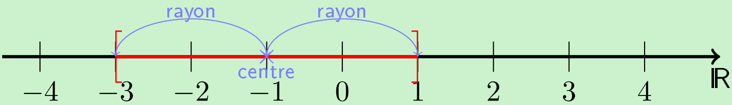
Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:



Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

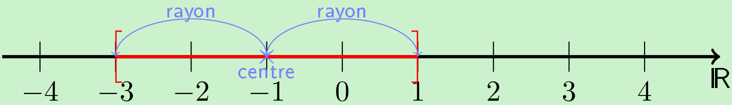


Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

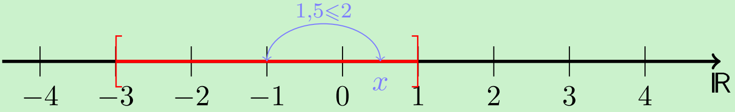


Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.
Un nombre x est dans cet intervalle s'il n'est pas trop loin du centre de cet intervalle : il faut que la distance entre le centre et le nombre x soit inférieure ou égale à 2.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

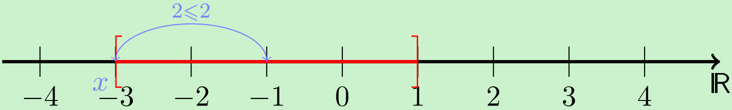


Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.
Un nombre x est dans cet intervalle s'il n'est pas trop loin du centre de cet intervalle : il faut que la distance entre le centre et le nombre x soit inférieure ou égale à 2.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

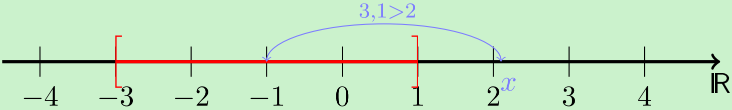


Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.
Un nombre x est dans cet intervalle s'il n'est pas trop loin du centre de cet intervalle : il faut que la distance entre le centre et le nombre x soit inférieure ou égale à 2.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

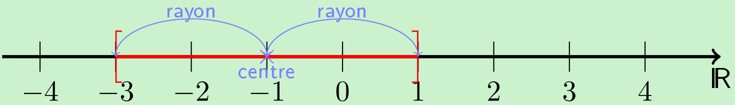


Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.
Un nombre x est dans cet intervalle s'il n'est pas trop loin du centre de cet intervalle : il faut que la distance entre le centre et le nombre x soit inférieure ou égale à 2.

Réciproquement, l'appartenance d'un nombre à certains intervalles bornés peut être traduite en terme de valeur absolue.

Exemple 11

Soit l'intervalle $[-3\,;\,1]$:



Le « centre » de cet intervalle est -1, son « rayon » est 2.
Un nombre x est dans cet intervalle s'il n'est pas trop loin du centre de cet intervalle : il faut que la distance entre le centre et le nombre x soit inférieure ou égale à 2.
Donc : $x \in [-3\,;\,1] \iff d(x;-1) \leqslant 2 \iff |x-(-1)| \leqslant 2 \iff |x+1| \leqslant 2$. Pour rappel, le symbole $\iff$ signifie « équivaut à » ou « si et seulement si ».

Partie exercices

Exercices 76 a) et c), 75 a) à d) page 29.

Partie exercices

Exercices 137 page 41 et 128 page 38 pour les plus forts.