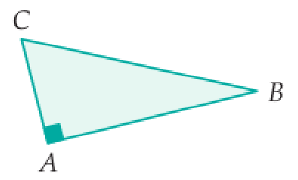
Géométrie plane

I – Théorèmes de Pythagore et de Thalès (rappels)

Théorème de Pythagore :

ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow$ $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
Ce théorème permet soit de calculer des distances, soit de prouver qu'un angle est droit.



Exercice 1

Soit EFG un triangle tel que EF = 4 ; EG = 7 ; FG = 5.

Ce triangle est-il rectangle ?

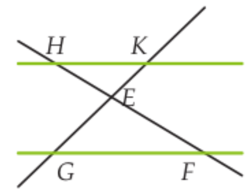
Exercice 2

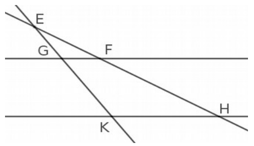
Soit PQR un triangle rectangle d'hypoténuse PQ = 10 et tel que QR = 5.

Calculer RP.

Théorème de Thalès :
Dans les figures ci-contre : K, E, G sont alignés dans cet ordre et H, E, F sont alignés dans cet ordre.

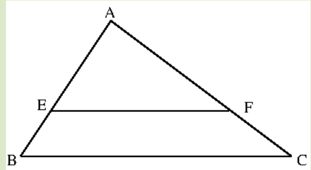
Si (HK) est parallèle à (GF) alors : $\frac{EH}{EF}=\frac{EK}{EG}=\frac{HK}{FK}$.
Ce théorème permet de calculer des distances. Sa réciproque permet de prouver que des droites sont parallèles.





Exercice 3

Sur la figure ci-contre, (EF) // (BC).



1°) Supposons que AE = 3, AF = 4 et AB = 5.
Calculer FC.

2°) Supposons maintenant que EB = 1 et AC = 5.

a) Écrire AF en fonction de AE.

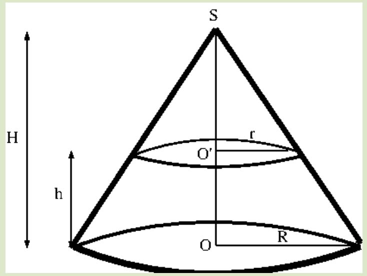
b) Pour quelle valeur de AE a-t-on AF = 4 ?

Exercice 4 (*)

Une toiture a une forme conique de hauteur

H = 5 m et de rayon de base R = 2 m.

Nous voulons construire un plancher a une certaine hauteur h.



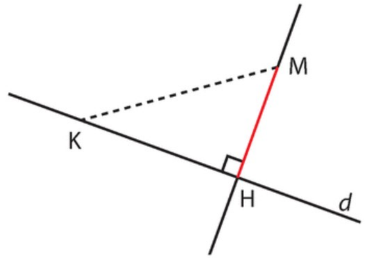
1°) Écrire le rayon r en fonction de h.

2°) Pour quelle valeur de h le rayon r est-il égal à 1 m 20 ?

3°) Calculer le volume habitable de la partie au-dessus du plancher et le volume en dessous du plancher (rappel : le volume d'un cône est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

II – Projeté orthogonal d’un point sur une droite

Définition
Le projeté orthogonal d’un point M sur une droite d est le point H de la droite d tel que (MH) est perpendiculaire à d.



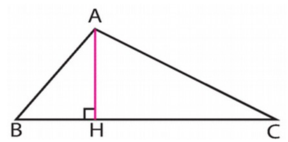
Propriété
La distance MH est la plus courte distance entre le point M et un point K de la droite.

Démonstration : soit K un point quelconque de d, alors, d’après le théorème de Pythagore : $MK^2 = MH^2 + HK^2$

or $HK^2 \geq 0$ donc $MK^2 \geq MH^2$ ce qui donne $MK \geq MH$.

Définition

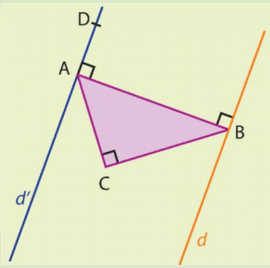
Dans un triangle ABC, la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) est la hauteur du triangle issue de A.
Le projeté orthogonal de A sur (BC) est le pied de la hauteur et AH est la distance entre le point A et la droite (BC).



La « hauteur » désigne aussi parfois la longueur AH.

Exercice 5

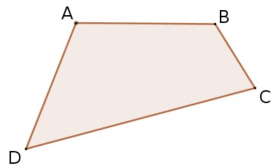
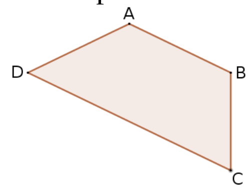
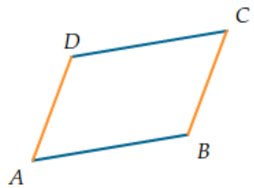
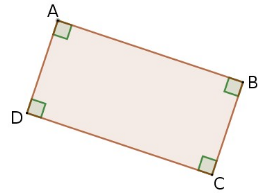
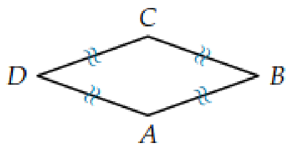
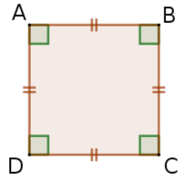
On considère un triangle ABC rectangle en C tel que AB = 5 cm, BC = 4 cm et AC = 3 cm. On trace deux droites *d* et *d′* perpendiculaires à [AB] et on place un point D sur la droite *d′*.
Déterminer les distances :
a) du point A à la droite (BC).
b) du point B à la droite (AC).
c) du point D à la droite *d*.



Exercice 6

Soit un rectangle ABCD tel que AB = 6 et BC = 3.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
1°) Calculez l’aire du triangle ABC.
2°) Calculez AC.
3°) Calculez la distance entre B et la droite (AC).

III – Quadrilatères (rappels)

Quadrilatère : figure à 4 côtés. 	Trapèze : quadrilatère ayant deux côtés parallèles. 
Parallélogramme : quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux. 	Rectangle : quadrilatère dont les angles sont droits. 
Losange : quadrilatère dont les côtés sont égaux. 	Carré : quadrilatère dont les côtés sont égaux et les angles droits. 

Pour prouver qu'un quadrilatère est un rectangle, il existe plusieurs façons :

- prouver qu'il a trois angles droits ;
- prouver que c'est un parallélogramme avec un angle droit ;
- prouver que c'est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.

De même pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme ou un losange ou un carré.

Attention : quand vous faîtes une figure pour illustrer un exercice, évitez de faire des quadrilatères trop particuliers (par exemple : si ABCD est un parallélogramme, ne dessinez pas un rectangle !).

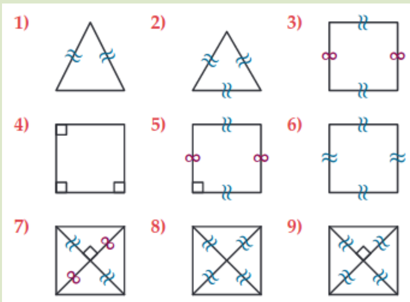
Exercice 7

1°) Dessinez un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires mais qui n'est pas un losange.

2°) Dessinez un quadrilatère ayant ses diagonales de même longueur mais qui n'est pas un rectangle.

Exercice 8

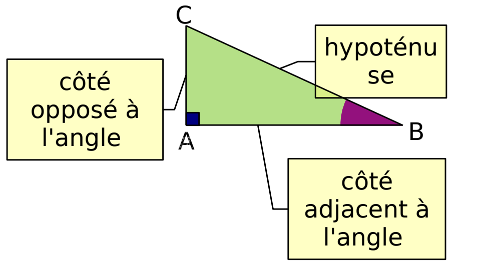
Voici quelques triangles et quadrilatères. Ils ressemblent à des triangles équilatéraux et à des carrés mais nous ne sommes pas sûrs qu'ils en sont. En fonction des informations données, indiquez la nature de chacune des figures.



IV – Trigonométrie dans le triangle rectangle (rappels)

Sur la figure ci-contre, nous travaillons avec l'angle $\widehat{ABC}$.

Suivant les cas, nous pouvons utiliser le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle.



Complétez : dans le triangle ……….. rectangle en ...…,

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{à} \dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ → CAH

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{à} \dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ → SOH

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{à} \dots\dots}{\text{côté} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{à} \dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ → TOA

→ en résumé : CAH SOH TOA

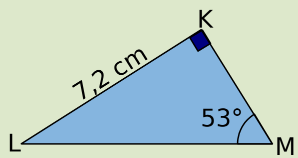
Exercice 9

Avec la figure ci-dessus, supposons que AB = 5 et AC = 3.
Calculez cos $\widehat{ABC}$. Donnez une mesure approchée de $\widehat{ABC}$ au degré près.

Exercice 10

On considère KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 7,2 cm et $\widehat{LMK}$ = 53°.

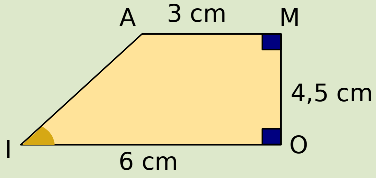
Calculer la longueur du côté [LM] arrondie au mm.



Exercice 11

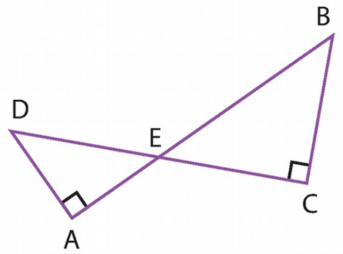
À l'aide des informations de la figure, calculez

la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{AIO}$.



Exercice 12

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) se coupent en un point E. Les triangles EAD et BCE sont rectangles et de plus : BC = 5, BE = 7 et AE = 4.



1. Calculer la valeur en degré, arrondie à 0,1, de l'angle $\widehat{BEC}$.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AED}$.
3. Calculer la longueur DE, arrondie à 10^{-1}.

Exercice 13

Avec votre calculatrice, complétez ce tableau :

angle α	0	30		60	
cos α			0,7		
sin α					0,9
$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2$					

Que pouvez-vous conjecturer ?

Quelques propriétés de cosinus et de sinus

Pour tout angle aigu α : $\quad 0<\cos\alpha<1 \qquad 0<\sin\alpha<1$

$$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$$

ce qui s'écrit aussi : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Démonstration de la 3ième propriété :
Nommons ABC un triangle rectangle quelconque et BC son hypoténuse.
Enfin, prenons $\alpha=\widehat{ABC}$. Alors :

$$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

Exercice 14
On donne cos α = 0,3. Calculez la valeur exacte de sin α .

V – Géométrie dans un repère («géométrie analytique»)

Soient, dans un repère du plan, deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$ les coordonnées de A et B.

1°) Milieu d'un segment

Propriété

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Remarque : il suffit de faire la moyenne des *x* puis la moyenne des *y*.

Exemple : si A (– 1 ; 2) et B (3 ; 5) alors le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{-1+3}{2};\frac{2+5}{2}\right)$ donc $\left(1;\frac{7}{2}\right)$.

Exercice 15

1) Dessinez un repère et placez quatre points A, B, C, D non alignés (arrangez-vous pour que le quadrilatère ABCD soit quelconque).

2) Calculez les coordonnées des points I, J, K, L, milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA]. Vérifiez au fur et à mesure avec le graphique.

3) Calculez les coordonnées des points M et N, milieux respectifs de [IK] et [JL]. Que pouvez-vous conclure ?

2°) Coordonnées d'un vecteur (rappel)

Propriété

Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soient les points E (– 8 ; 2), F (4 ; – 2), G (2 ; – 8) et H (– 10 ; – 4).
Prouvez que EFGH est un parallélogramme :
1) En utilisant la formule des coordonnées d'un milieu.
2) En utilisant la formule des coordonnées d'un vecteur.

3°) Norme d'un vecteur (rappel)

Propriété (valable dans une base orthonormée)

Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Exercice 17

Calculer les normes de $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

4°) Distance entre deux points (conséquence de 2°) et 3°))

Propriété (valable dans un repère orthonormé)

La distance entre A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans un repère orthonormé.

Exercice 18

1) Avec les points de l'exercice 16, calculez les longueurs EF, FG et EG.
2) Prouvez que EFGH est un rectangle.

Exercice 19

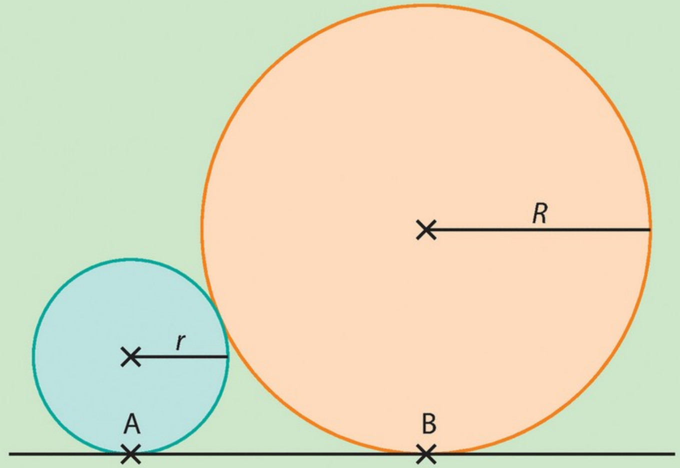
Soient les points T (4 ; – 2) et U (– 7 ; 5).
1) Le point U est-il sur le cercle de centre T et de rayon 13 ?
2) Le point V (4 ; 10) est-il sur la médiatrice de [UT] ?
(La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment).

Exercice 20

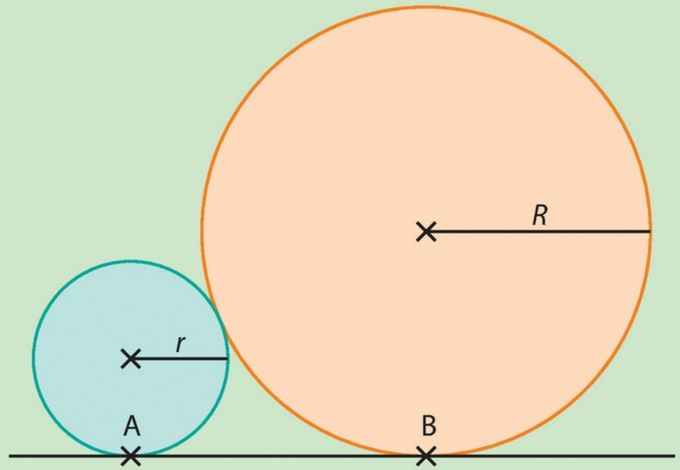
Soient les points E (2 ; 3), N (– 3 ; 3), Z (– 1 ; – 1).

1) Étudiez la nature du triangle NEZ.
2) Calculez les coordonnées du point A, symétrique de E par rapport à (NZ).
3) Quelle est la nature du quadrilatère NAZE (justifiez) ?
4) Calculez les coordonnées de S, centre de NAZE.
5) Déterminer les mesures en degrés des angles de NAZE, au degré près.
6) Calculez l'aire exacte de NAZE.
7) Calculez la distance exacte entre S et le côté [MQ].
(Pour les plus forts : cherchez deux méthodes).

Deux cercles sont tangents à une droite (AB) et également entre eux. Leurs rayons respectifs sont r et R.
Montrer que $AB^2 = 4\,r\,R$



Deux cercles sont tangents à une droite (AB) et également entre eux. Leurs rayons respectifs sont r et R.
Montrer que $AB^2 = 4\,r\,R$



Sources des figures et de quelques exercices :
https://manuel.sesamath.net/index.php?page=telechargement_3e_2008
https://manuel.sesamath.net/index.php?page=telechargement_cycle4_2016
https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms2_2019&page_gauche=115