# Fonctions de référence

Y. Moncheaux

Janvier 2023

# Table des matières


1. Fonctions affines (Rappels)
2. Fonction carré
3. Fonction inverse
4. Fonction cube
5. Fonction racine carrée
6. Comparaisons de quelques fonctions

# I – Fonctions affines (rappels)

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.
Expression de $f(x)$ :

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.
Expression de $f(x)$ : $f(x) =$

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.

– j'ai déjà au départ : 85 € ;

– tous les mois j'ajouterai : 20 €.

Soient :

$x$ le nombre de mois écoulés ;

$f(x)$ le montant de mes économies.

<u>Expression de $f(x)$ :</u> $f(x) = 85 +$

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.
Expression de $f(x)$ : $f(x) = 85 + 20\,x$

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.
Expression de $f(x)$ : $f(x) = 85 + 20\,x = 20\,x + 85$.

# Ne pas noter

## Exemple 1

J'économise pendant 30 mois.
– j'ai déjà au départ : 85 € ;
– tous les mois j'ajouterai : 20 €.
Soient :
$x$ le nombre de mois écoulés ;
$f(x)$ le montant de mes économies.
Expression de $f(x)$ : $f(x) = 85 + 20\,x = 20\,x + 85$.
Nous dirons que la fonction $f$ est définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$.

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?

Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?
Réponse :
$f(x) = 500$

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?
Réponse :
$f(x) = 500 \iff 20\,x + 85 = 500$

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?
Réponse :

$$\begin{aligned} f(x) = 500 \quad &\Longleftrightarrow \quad 20\,x + 85 = 500 \\ &\Longleftrightarrow \quad 20\,x = 500 - 85 = 415 \end{aligned}$$

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?
Réponse :

$$\begin{aligned} f(x) = 500 &\iff 20\,x + 85 = 500 \\ &\iff 20\,x = 500 - 85 = 415 \\ &\iff x = 415 \div 20 = 20,75 \text{ mois.} \end{aligned}$$

# Ne pas noter

## Exemple 1

Question 1 : combien d'argent aurais-je dans 18 mois ?
Réponse : $f(18) = 20 \times 18 + 85 = 445$ €.
Ici, j'ai calculé l'image de 18 par $f$.

Question 2 : dans combien de temps aurais-je 500 € ?
Réponse :

$$\begin{aligned} f(x) = 500 &\iff 20\,x + 85 = 500 \\ &\iff 20\,x = 500 - 85 = 415 \\ &\iff x = 415 \div 20 = 20,75 \text{ mois.} \end{aligned}$$

Ici, j'ai cherché l'antécédent de 500 par $f$ (il y a parfois plusieurs antécédents).

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\;;\;30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\ ;\ 30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | $0$ | $10$ | $15$ | $20$ | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\ ;\ 30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | | | | |

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | 285 | | | |

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | $0$ | $10$ | $15$ | $20$ | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $85$ | $285$ | $385$ | | |

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\;;\;30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | $0$ | $10$ | $15$ | $20$ | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $85$ | $285$ | $385$ | $485$ | |

# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\ ;\ 30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | $0$ | $10$ | $15$ | $20$ | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $85$ | $285$ | $385$ | $485$ | $685$ |

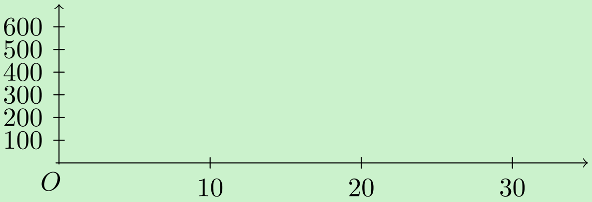
# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\;;\;30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | $0$ | $10$ | $15$ | $20$ | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $85$ | $285$ | $385$ | $485$ | $685$ |



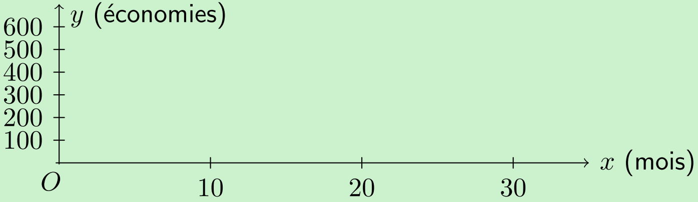
# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | 285 | 385 | 485 | 685 |



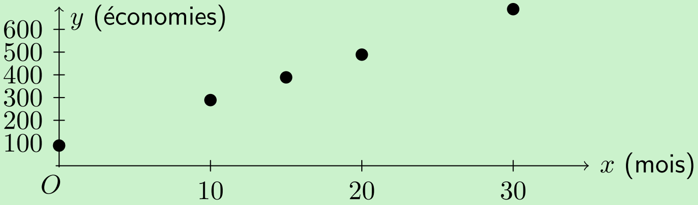
# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\,;\,30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | 285 | 385 | 485 | 685 |



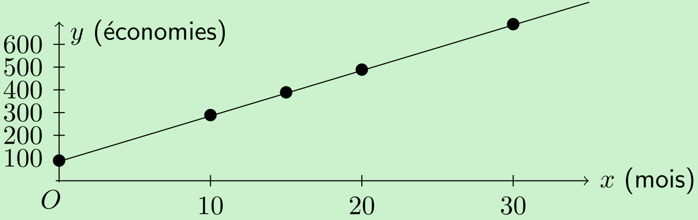
# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[\,0\;;\;30\,]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | 285 | 385 | 485 | 685 |



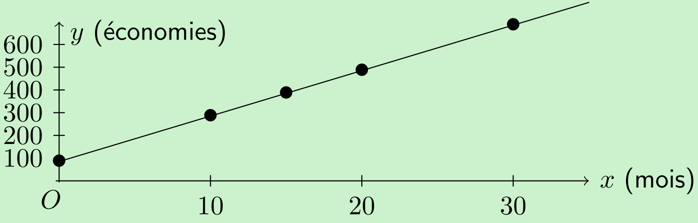
# Ne pas noter

## Exemple 1

Courbe de $f$, définie sur $[0\,;\,30]$ par $f(x) = 20\,x + 85$ :

je fais un tableau de valeurs en calculant quelques images

| $x$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 85 | 285 | 385 | 485 | 685 |




Conjecture : les points semblent être alignés.

# Ne pas noter

## Utilisation de la Numworks

Lien vers le simulateur Numworks

Pour faire un tableau de valeurs à la calculatrice :

- choisir « Fonctions » dans le menu ;
- OK pour ajouter une fonction puis entrer l'expression de la fonction (utiliser la troisième touche en haut à gauche pour avoir $x$) puis OK ;
- avec les flèches, descendre sur « Afficher les valeurs » puis OK ;
- avec les flèches, aller sur « Régler l'intervalle » puis OK ;
- choisir ici 0 ; 30 et 10 pour les valeurs puis aller sur « Valider » et OK ;
- vous pouvez aussi afficher le graphique.

(D) Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = a\,x + b}$ (où $a$ et $b$ sont des constantes) est une fonction affine.

(D) Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = a\,x + b}$ (où $a$ et $b$ sont des constantes) est une fonction affine.

**Exemple 2**

$f(x) = 20\,x + 85.$

# Ne pas noter

Cas particuliers :

# Ne pas noter

Cas particuliers :

Si $b = 0$, donc si $f(x) = a\,x$, alors $f$ est une **fonction linéaire**.

# Ne pas noter

Cas particuliers :

Si $b = 0$, donc si $f(x) = a\,x$, alors $f$ est une **fonction linéaire**.

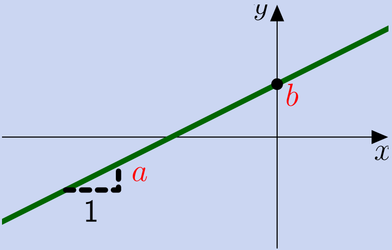
Si $a = 0$, donc si $f(x) = b$, alors $f$ est une **fonction constante**.

# Partie exercices

Exercices 15, 16, 17, 20 page 194.

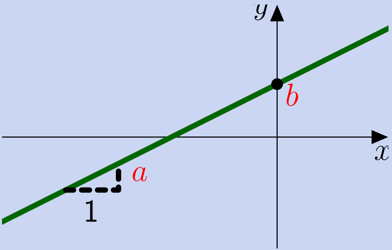
## Propriété

La courbe d'une fonction affine $f$ est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).



## Propriété

La courbe d'une fonction affine $f$ est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).



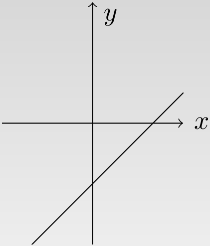

## Définition

$a$ est le coefficient directeur de cette droite et $b$ est son ordonnée à l'origine.

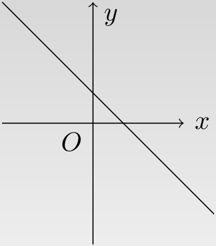
# Ne pas noter

Nous verrons plus tard que pour savoir si la droite « monte » ou « descend », il suffit de regarder le signe de $a$ :

si $a$ est positif



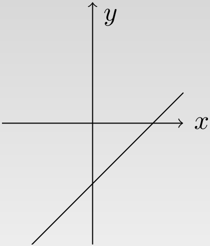

si $a$ est négatif



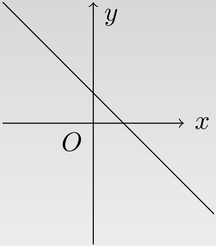
# Ne pas noter

Nous verrons plus tard que pour savoir si la droite « monte » ou « descend », il suffit de regarder le signe de $a$ :

si $a$ est positif




si $a$ est négatif



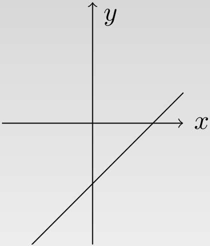

## Exemple 3

Dans l'exemple précédent (économies), $a = 20$ donc la droite « monte ».

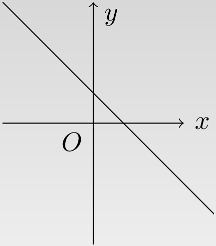
# Ne pas noter

Nous verrons plus tard que pour savoir si la droite « monte » ou « descend », il suffit de regarder le signe de $a$ :

si $a$ est positif




si $a$ est négatif




## Exemple 3

Dans l'exemple précédent (économies), $a = 20$ donc la droite « monte ». Si $a = -10$ (perte de 10 euros par mois) alors la droite « descendrait ».

# Partie exercices

Exercice 18 page 194.

# Partie exercices

**Exercice à noter et à faire**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7x + 2$.

1°) a) Tracez sur votre calculatrice la courbe de la fonction $f$.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$ puis l'inéquation $f(x) < -3$.

2°) Résoudre par le calcul $f(x) = -3$ puis $f(x) < -3$.

# II – Fonction carré

## 1°) Définition, images et antécédents

Ⓓ La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^2}$.

# II – Fonction carré

## 1°) Définition, images et antécédents

Ⓓ La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^2}$.

### Exemples 4

$f(2) = 2^2 = 4$ (l'image de 3 est 4) ;

# II – Fonction carré

## 1°) Définition, images et antécédents

Ⓓ La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^2}$.

**Exemples 4**

$f(2) = 2^2 = 4$ (l'image de 3 est 4) ;
$f(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

# II – Fonction carré

## 1°) Définition, images et antécédents

Ⓓ La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^2}$.

**Exemples 4**

$f(2) = 2^2 = 4$ (l'image de 3 est 4) ;
$f(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.
($-2$ et 2 ont la même image)

# Ne pas noter

## Remarques

– bien que l'expression $x^2$ ne comporte pas de parenthèses, il faut penser à en rajouter parfois, par exemple $f(-4)$ est égal à $(-4)^2$ et pas à $-4^2$ !

# Ne pas noter

## Remarques

– bien que l'expression $x^2$ ne comporte pas de parenthèses, il faut penser à en rajouter parfois, par exemple $f(-4)$ est égal à $(-4)^2$ et pas à $-4^2$ !

– le carré d'une somme n'est pas égale à la somme des carrés : $(1+1)^2 = 2^2 = 4$ et $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ donc $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ !

## Exemple 5

- $f(-2) = (-2)^2 = 4$

## Exemple 5

- $f(-2) = (-2)^2 = 4$
- $f(4\sqrt{3}) = (4\sqrt{3})^2 = 4^2 \times \sqrt{3}^2 = 16 \times 3 = 48$

## Exemple 5

- $f(-2) = (-2)^2 = 4$
- $f(4\sqrt{3}) = (4\sqrt{3})^2 = 4^2 \times \sqrt{3}^2 = 16 \times 3 = 48$
- $f(2+\sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$
$4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$.

Ⓟ Deux nombres opposés ont la même image (par exemple $f(-2) = 4$ et $f(2) = 4$).

Ⓟ Deux nombres opposés ont la même image (par exemple $f(-2) = 4$ et $f(2) = 4$).

Nous disons alors que la fonction carré est une fonction paire.

# Ne pas noter

**Remarque**

Attention : un nombre n'a qu'une seule image mais peut avoir plusieurs antécédents !

## Exemple 6

Antécédent(s) de 9 :

## Exemple 6

Antécédent(s) de 9 : 3 et $-3$.

Antécédent(s) de 5 :

## Exemple 6

Antécédent(s) de 9 : 3 et $-3$.
Antécédent(s) de 5 : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
Antécédent(s) de 0 :

## Exemple 6

Antécédent(s) de 9 : 3 et $-3$.
Antécédent(s) de 5 : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
Antécédent(s) de 0 : 0.
Antécédent(s) de $-3$ :

## Exemple 6

Antécédent(s) de 9 : 3 et $-3$.
Antécédent(s) de 5 : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
Antécédent(s) de 0 : 0.
Antécédent(s) de $-3$ : il n'y en a pas car le carré d'un réel est positif.

# Partie exercices

Exercices 21 à 28 page 195.
Exercice 13 page 194.

# Ne pas noter

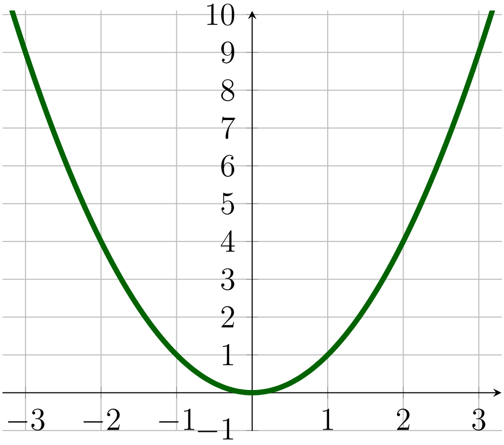
## Remarque

La fonction carré n'est pas une fonction *linéaire*, par exemple le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $0$ | $1$ | $4$ |

n'est pas un tableau de proportionalité.

# 2°) Courbe représentative de la fonction carré



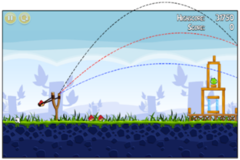
(D) Cette courbe est une parabole.

Ⓓ Cette courbe est une parabole.

Ⓟ Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car la fonction est paire.

# Ne pas noter

Les paraboles apparaissent dans beaucoup de phénomènes physiques.



# Partie exercices

Exercice 30 page 195.

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

- avec deux nombres positifs :

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

• avec deux nombres de signes différents :

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

- avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

- avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

• avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

mais :

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

• avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

mais :

$-5 \leqslant 2$ et $(-5)^2 = 25 \geqslant 2^2$

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

• avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

• avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

mais :

$-5 \leqslant 2$ et $(-5)^2 = 25 \geqslant 2^2$(inversion de l'ordre)

# Ne pas noter

## Exemples 7

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?

- avec deux nombres positifs :

$2 \leqslant 5$ et $2^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-3 \leqslant -1$ et $(-3)^2 = 9 \geqslant (-1)^2 = 1$(inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

$-2 \leqslant 5$ et $(-2)^2 \leqslant 5^2$(conservation de l'ordre)

mais :

$-5 \leqslant 2$ et $(-5)^2 = 25 \geqslant 2^2$(inversion de l'ordre)

Si les nombres n'ont pas le même signe, il faut calculer les images.

# 3°) Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$

Comparaison de $f(a) = a^2$ et de $f(b) = b^2$ quand $a < b$ :

- si $a$ et $b$ sont positifs alors $a^2 < b^2$ ;
- si $a$ et $b$ sont négatifs alors $a^2 > b^2$ ;
- si $a$ et $b$ n'ont pas le même signe alors il faut connaître leur valeur.

# Partie exercices

Exercice 31 page 195

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or :

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 =$

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ ;

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ ; $(2\sqrt{3})^2 =$

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ ; $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ ; $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$. Comme $18 > 12$,

# Ne pas noter

## Exemple 8

Sans calculatrice, trouver qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$ ?
Les nombres sont positifs donc sont rangés dans le même ordre que leur carré.
Or : $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ ; $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$. Comme $18 > 12$, on trouve que $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

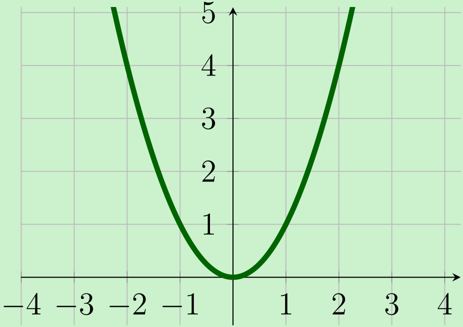
# 4°) Résolution d'(in)équations

**Exemple 9**

Résoudre graphiquement $x^2 = 3$ puis $x^2 < 3$.

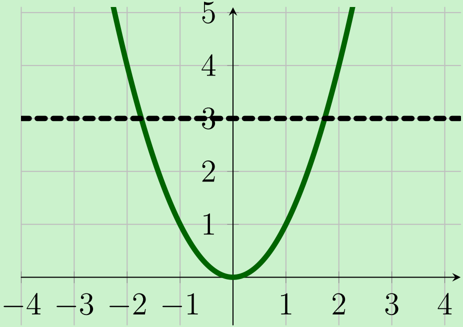
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 = 3$ :



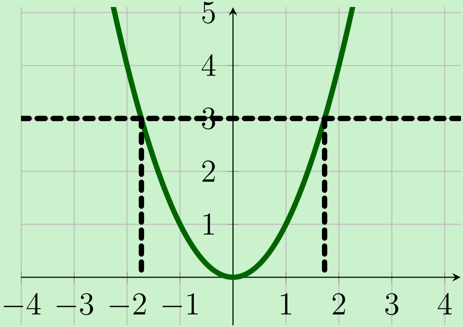
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 = 3$ :



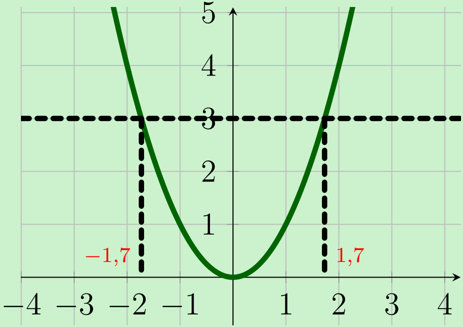
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 = 3$ :



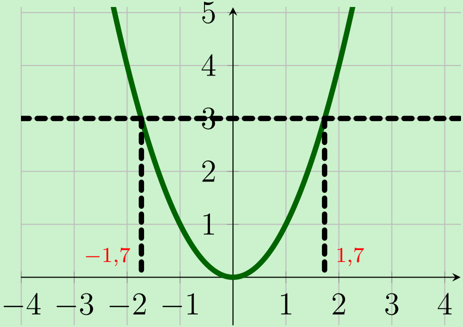
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 = 3$ :



## Exemple 9

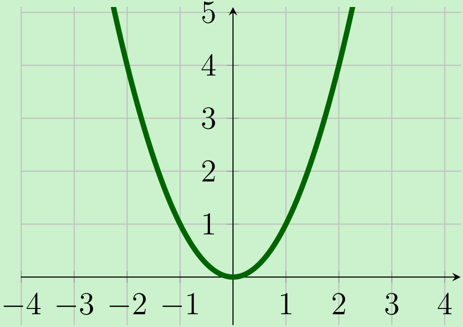
Résolution graphique de $x^2 = 3$ :




donc $x^2 = 3$ quand $x \simeq -1,7$ ou $x \simeq 1,7$.

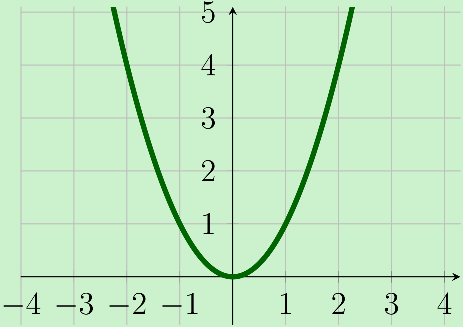
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



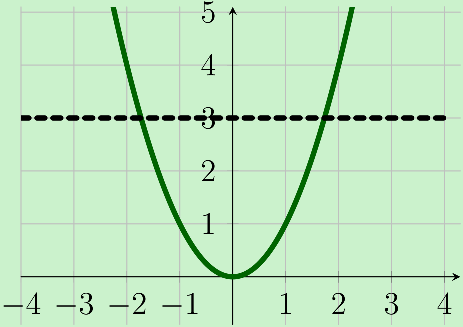
### Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



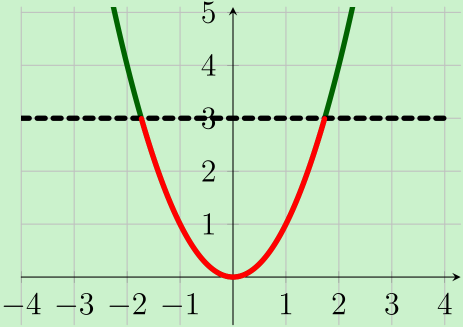
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



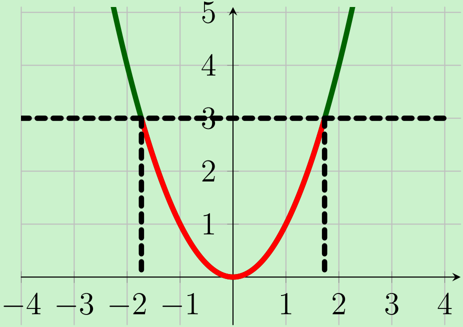
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



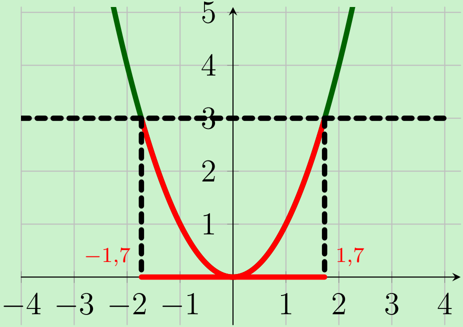
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



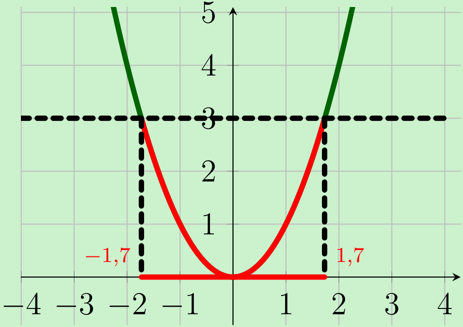
## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :



## Exemple 9

Résolution graphique de $x^2 < 3$ :




donc $x^2 < 3$ quand $x \in \ ]-1,7\,;\ 1,7[$ environ.

# Ne pas noter

Nous verrons dans un prochain chapitre (Calcul littéral 2) comment résoudre ces (in)équations sans courbe.

# Ne pas noter

Nous verrons dans un prochain chapitre (Calcul littéral 2) comment résoudre ces (in)équations sans courbe.
Pour l'instant, nous allons utiliser la courbe et le fait que les antécédents de 3 sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

### Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :

### Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :

$x^2 = 3$

## Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :

$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}$

## Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :
$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

## Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :
$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Solutions exactes de $x^2 < 3$ :

## Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :
$x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Solutions exactes de $x^2 < 3$ :
$x^2 < 3 \iff x \in \ ]-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}[$ .

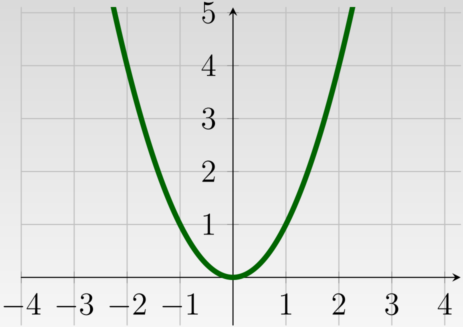
### Exemple 9

Solutions exactes de $x^2 = 3$ :
$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Solutions exactes de $x^2 < 3$ :
$x^2 < 3 \Longleftrightarrow x \in \ \left]-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\right[$ .
Attention : $x^2 < 3 \not\Leftrightarrow x < \sqrt{3}$.

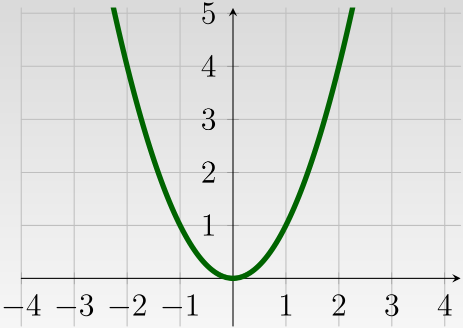
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^2 = 5$.



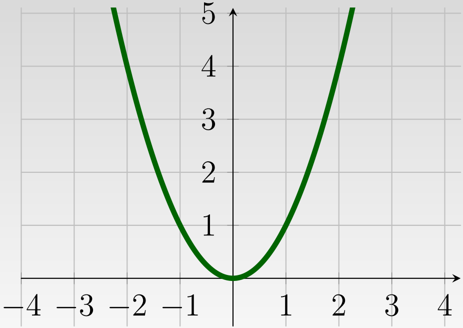
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^2 > 2$.



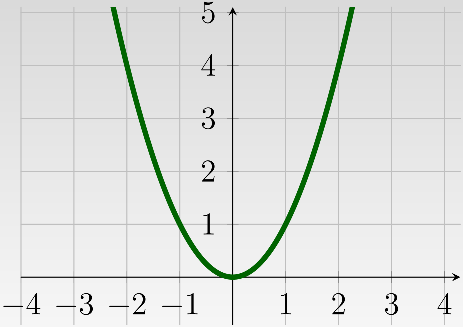
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^2 < 1$.



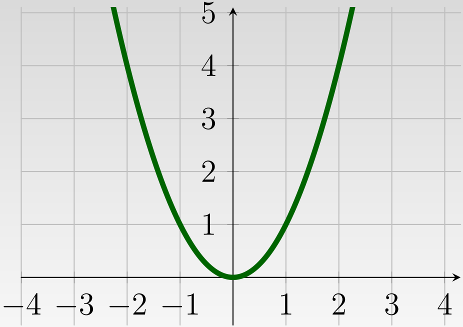
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^2 < -2$.



# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^2 > -1$.



# Partie exercices

Exercice 5 page 193
Exercice 33 page 195
Exercice 85 page 201

# III – Fonction inverse

## 1°) Définition, images et antécédents

Ⓓ La fonction inverse associe à tout réel non nul son inverse.

La fonction inverse est donc définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

# Ne pas noter

Important : la fonction inverse n'est pas définie en 0.

Autrement dit : le nombre 0 est une *valeur interdite* pour la fonction inverse.

## Exemples 10

- $f(4) = \dfrac{1}{4} = 0,25\,;$

## Exemples 10

- $f(4) = \dfrac{1}{4} = 0,25\,;$
- $f(-7) = \dfrac{1}{-7} = -\dfrac{1}{7}\,;$

## Exemples 10

- $f(4) = \dfrac{1}{4} = 0,25\,;$
- $f(-7) = \dfrac{1}{-7} = -\dfrac{1}{7}\,;$
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}\,;$

## Exemples 10

- $f(4) = \dfrac{1}{4} = 0,25\,;$
- $f(-7) = \dfrac{1}{-7} = -\dfrac{1}{7}\,;$
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}\,;$
- $f(10^{-3}) = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^{3}.$

Ⓟ Par la fonction inverse, deux nombres opposés ont des images opposées.

(P) Par la fonction inverse, deux nombres opposés ont des images opposées.

Par exemple, $f(-3) = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$ et $f(3) = \dfrac{1}{3}$ donc $f(-3) = -f(3)$.

Ⓟ Par la fonction inverse, deux nombres opposés ont des images opposées.

Par exemple, $f(-3) = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$ et $f(3) = \dfrac{1}{3}$ donc $f(-3) = -f(3)$.

La fonction inverse est une fonction impaire.

# Ne pas noter

**Remarque**

Par la fonction inverse, l'image d'un nombre est aussi son antécédent !

## Exemple 11

Antécédent de 1 :

## Exemple 11

Antécédent de 1 : $\dfrac{1}{x} = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{1} = 1$.

Antécédent de 3 :

## Exemple 11

Antécédent de 1 : $\dfrac{1}{x} = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{1} = 1.$

Antécédent de 3 : $\dfrac{1}{x} = 3 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{3}.$

Antécédent de 0 :

## Exemple 11

Antécédent de 1 : $\dfrac{1}{x} = 1 \iff x = \dfrac{1}{1} = 1.$

Antécédent de 3 : $\dfrac{1}{x} = 3 \iff x = \dfrac{1}{3}.$

Antécédent de 0 : il n'y en a pas.

Antécédent de $\dfrac{4}{5}$ :

## Exemple 11

Antécédent de 1 : $\dfrac{1}{x} = 1 \iff x = \dfrac{1}{1} = 1$.

Antécédent de 3 : $\dfrac{1}{x} = 3 \iff x = \dfrac{1}{3}$.

Antécédent de 0 : il n'y en a pas.

Antécédent de $\dfrac{4}{5}$ : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{5} \iff x = \dfrac{1}{4/5} = \dfrac{5}{4}$.

# Partie exercices

Exercices 36, 37 et 38 page 195.

# Ne pas noter

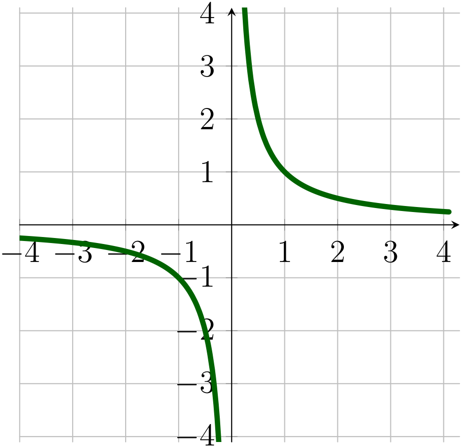
## Remarque

La fonction inverse n'est pas une fonction *linéaire*, par exemple le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | $1$ | $2$ | $4$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $1/x$ | $1$ | $0,5$ | $0,25$ |

n'est pas un tableau de proportionalité.

# 2°) Courbe représentative de la fonction inverse



(D) Cette courbe est une hyperbole.

Ⓓ Cette courbe est une hyperbole.

Ⓟ Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère car la fonction inverse est impaire.

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

• avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

• avec deux nombres négatifs :

$-2 > -5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{-5}$ (encore une inversion de l'ordre)

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-2 > -5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{-5}$ (encore une inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-2 > -5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{-5}$ (encore une inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

$-2 < 5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{5}$ (conservation de l'ordre).

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.

## Exemples 12

- avec deux nombres positifs :

$2 < 5$ et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ (inversion de l'ordre)

- avec deux nombres négatifs :

$-2 > -5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{-5}$ (encore une inversion de l'ordre)

- avec deux nombres de signes différents :

$-2 < 5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{5}$ (conservation de l'ordre).

Si les nombres ont le même signe alors ils sont rangés dans l'ordre contraire de leur image.

# 3°) Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$

Comparaison de $f(a) = \dfrac{1}{a}$ et de $f(b) = \dfrac{1}{b}$ quand $a < b$ :

- si $a$ et $b$ ont le même signe alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ;
- si $a$ et $b$ n'ont pas le même signe alors $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

# Partie exercices

Exercice 44 page 196

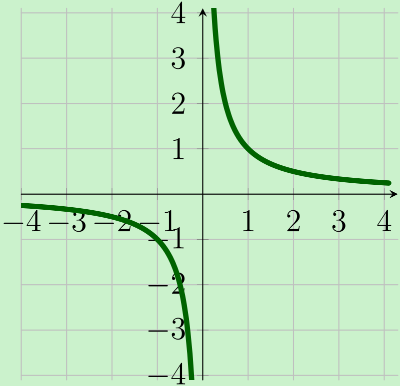
# 4°) Résolution d'(in)équations

**Exemple 13**

Résoudre graphiquement puis algébriquement $\dfrac{1}{x} = 3$ puis $\dfrac{1}{x} < 3$.

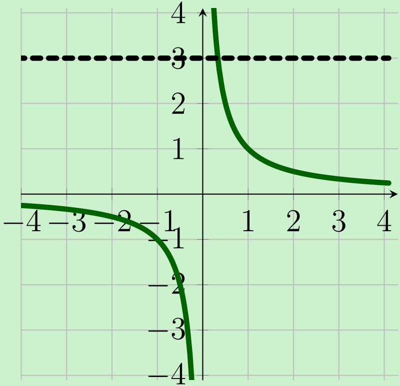
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :



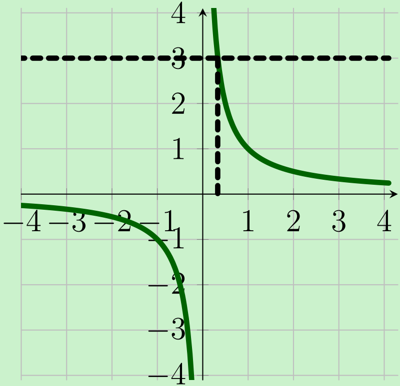
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :



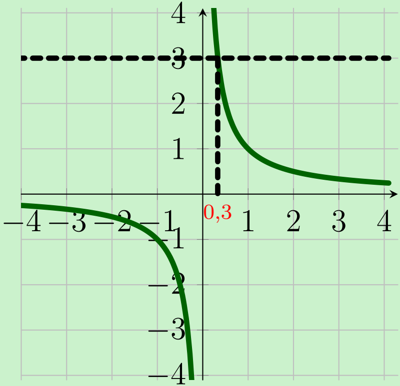
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :



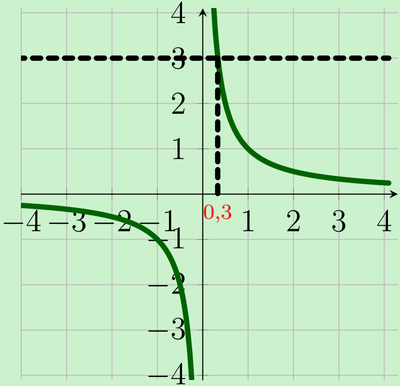
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :



## Exemple 13

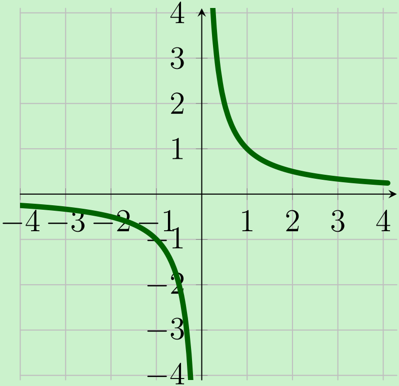
Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :




donc $\dfrac{1}{x} = 3$ quand $x \simeq 0,3$.

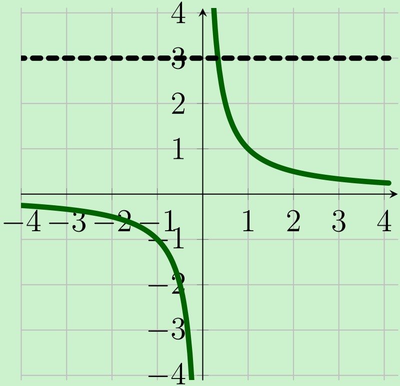
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :



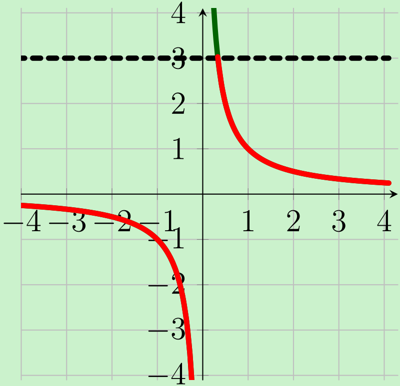
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :



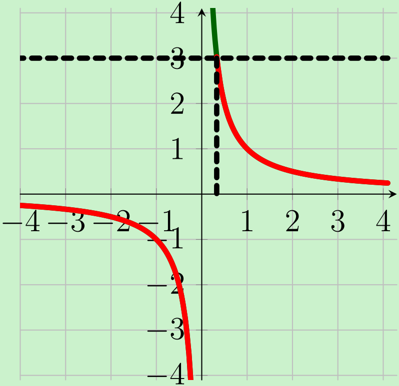
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :



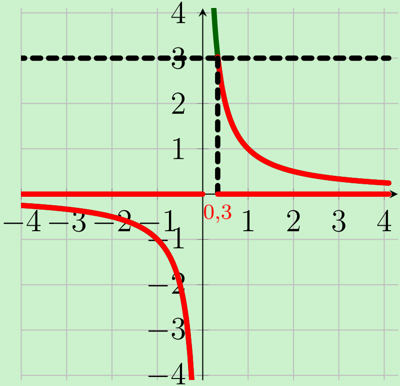
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :



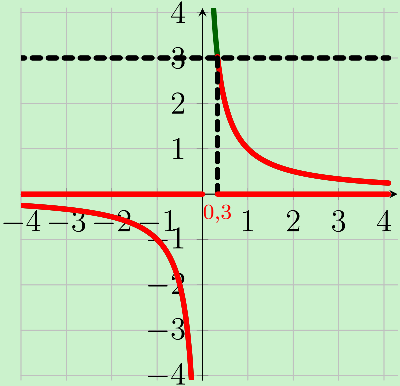
## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :



## Exemple 13

Résolution graphique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :




donc $\dfrac{1}{x} < 3$ quand $x \in \ ]-\infty\,;\,0[\ \cup\ ]0,3\,;\,+\infty[$ environ.

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$$\frac{1}{x} = 3$$

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$$\frac{1}{x} = 3 \Longleftrightarrow 1 = 3\,x$$

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$\dfrac{1}{x} = 3 \iff 1 = 3\,x \iff x = \dfrac{1}{3}$.

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$\dfrac{1}{x} = 3 \iff 1 = 3\,x \iff x = \dfrac{1}{3}$.

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$\dfrac{1}{x} = 3 \iff 1 = 3\,x \iff x = \dfrac{1}{3}$.

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :

en observant la courbe,

$\dfrac{1}{x} < 3 \iff x \in \ \left]-\infty\,;\,0\right[\ \cup\ \left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

## Exemple 13

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} = 3$ :

$\dfrac{1}{x} = 3 \iff 1 = 3\,x \iff x = \dfrac{1}{3}$.

Résolution algébrique de $\dfrac{1}{x} < 3$ :

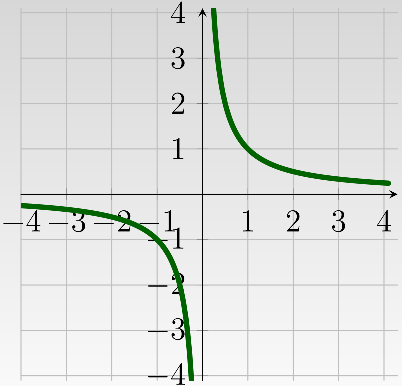
en observant la courbe,

$\dfrac{1}{x} < 3 \iff x \in \ ]-\infty\,;\,0[\ \cup \ \left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

Attention : $\dfrac{1}{x} < 3 \not\Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$ !

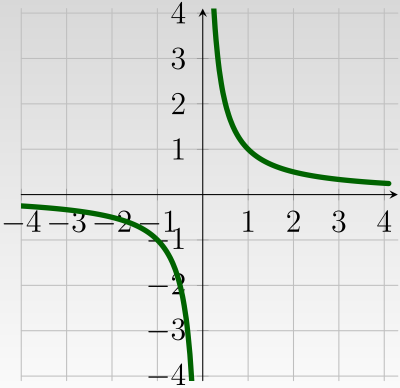
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\dfrac{1}{x} = 4.$



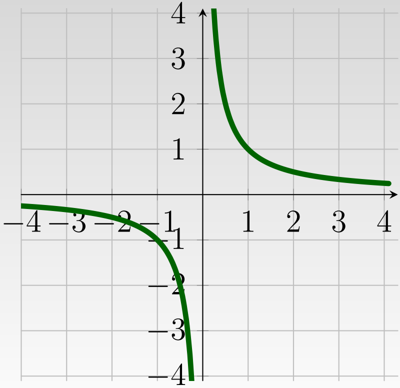
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\dfrac{1}{x} > 2$.



# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\dfrac{1}{x} < 1$.



# Partie exercices

Exercices 45, 47 page 196
Exercice 78 page 200 (algo avec while et fonction)
Exercices 88, 89 page 202
Exercice 102 page 204

# IV – Fonction cube

## 1°) Définition, images et antécédents

D La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^3}$.

**Exemples 14**

- $f(4) = 4^3 = 64$ ;

## Exemples 14

- $f(4) = 4^3 = 64$ ;
- $f(-1) = (-1)^3 = -1$ ;

## Exemples 14

- $f(4) = 4^3 = 64$ ;
- $f(-1) = (-1)^3 = -1$ ;
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$ ;

### Exemples 14

- $f(4) = 4^3 = 64$ ;
- $f(-1) = (-1)^3 = -1$ ;
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$ ;
- $f(10^{-2}) = (10^{-2})^3 = 10^{-6}$.

# Ne pas noter

**Remarque**

Comme pour la fonction carrée, l'image d'une somme n'est pas la somme des images !

# Ne pas noter

## Remarque

Comme pour la fonction carrée, l'image d'une somme n'est pas la somme des images !
$(1+1)^3 = 2^3 = 8$ et $1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$ donc
$(1+1)^3 \neq 1^3 + 1^3$.

Ⓟ Par la fonction cube, deux nombres opposés ont des images opposées.

Ⓟ Par la fonction cube, deux nombres opposés ont des images opposées.
Par exemple, $f(-3) = (-3)^3 = -27$ et $f(3) = 3^3 = 27$ donc $f(-3) = -f(3)$.

Ⓟ Par la fonction cube, deux nombres opposés ont des images opposées.
Par exemple, $f(-3) = (-3)^3 = -27$ et $f(3) = 3^3 = 27$ donc $f(-3) = -f(3)$.

La fonction cube est donc une fonction impaire.

# Ne pas noter

**Remarque**

La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires !

# Ne pas noter

## Remarque

La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires !
Par exemple, avec $f(x) = x + 1$, nous avons $f(-3) = -2$ et $f(3) = 4$ : les résultats ne sont ni égaux, ni opposés.

# Ne pas noter

**Remarque**

Par la fonction cube, chaque nombre a un antécédent et un seul.

# Ne pas noter

**Remarque**

Par la fonction cube, chaque nombre a un antécédent et un seul.
L'antécédent d'un nombre $a$ est la *racine cubique* de $a$, notée $\sqrt[3]{a}$.

**Exemples 15**

Antécédent de 1 :

## Exemples 15

Antécédent de 1 : $\sqrt[3]{1} = 1$.

Antécédent de 3 :

**Exemples 15**

Antécédent de 1 : $\sqrt[3]{1} = 1$.
Antécédent de 3 : $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$.
Antécédent de $-8$ :

## Exemples 15

Antécédent de 1 : $\sqrt[3]{1} = 1$.
Antécédent de 3 : $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$.
Antécédent de $-8$ : $\sqrt[3]{-8} = -2$.
Antécédent de $\dfrac{1}{64}$ :

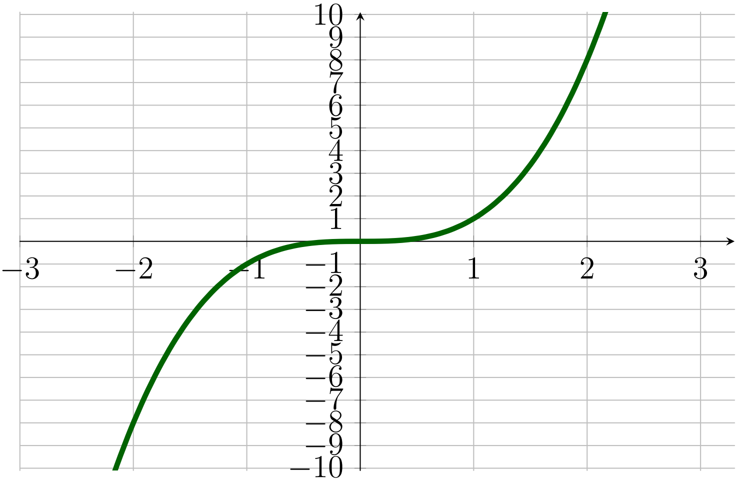
**Exemples 15**

Antécédent de 1 : $\sqrt[3]{1} = 1$.
Antécédent de 3 : $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$.
Antécédent de $-8$ : $\sqrt[3]{-8} = -2$.
Antécédent de $\dfrac{1}{64}$ : $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4}$.

# Partie exercices

Exercices 49 à 52 page 196.

# 2°) Courbe représentative de la fonction cube



# Ne pas noter

Cette courbe est une cubique.

Ⓟ La courbe de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère car la fonction cube est impaire.

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $a^3 < b^3$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 16**

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $a^3 < b^3$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 16**

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $a^3 < b^3$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 16**

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$
$-2 > -5$ donc $(-2)^3 > (-5)^3$

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $a^3 < b^3$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 16**

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$
$-2 > -5$ donc $(-2)^3 > (-5)^3$
$-2 < 5$ donc $(-2)^3 < 5^3$.

# 3°) Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$

P Si $a < b$ alors $a^3 < b^3$.

# Partie exercices

Exercice 55 page 197

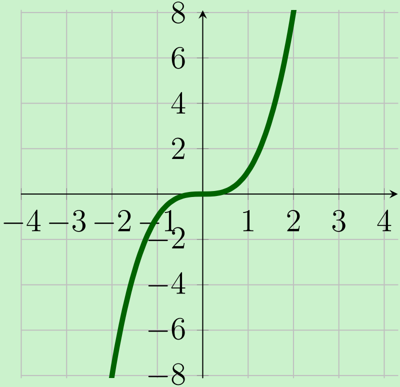
# 4°) Résolution d'(in)équations

**Exemple 17**

Résoudre graphiquement puis algébriquement $x^3 = 4$ puis $x^3 < 4$.

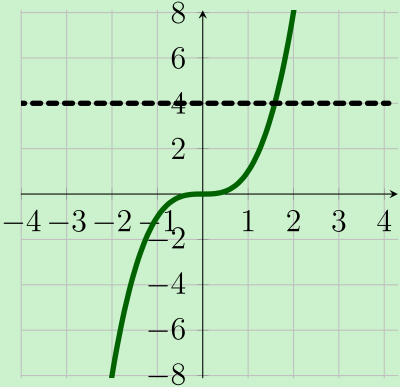
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 = 4$ :



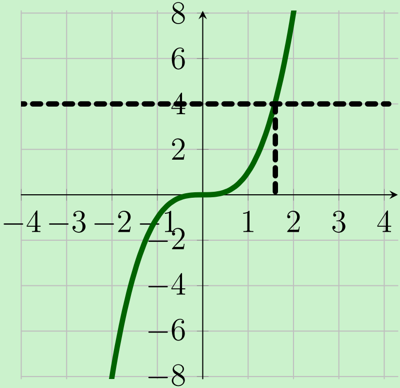
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 = 4$ :



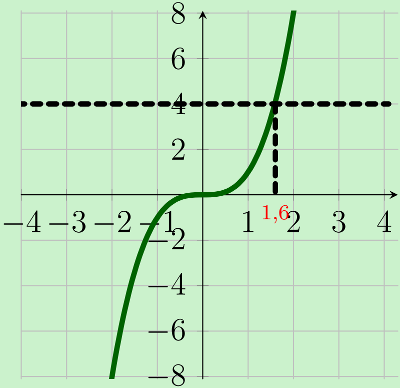
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 = 4$ :



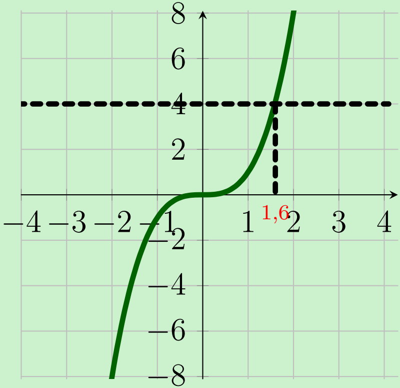
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 = 4$ :



## Exemple 17

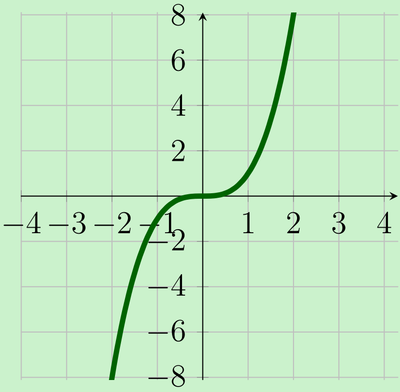
Résolution graphique de $x^3 = 4$ :




donc $x^3 = 4$ quand $x \simeq 1,6$.

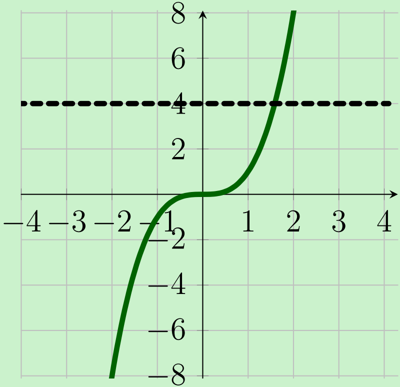
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :



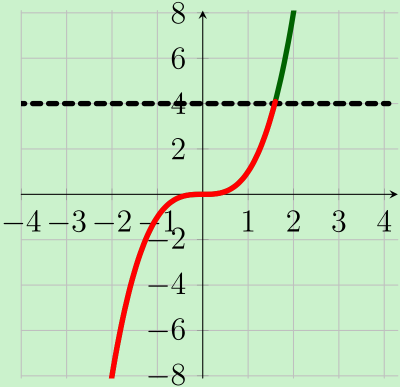
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :



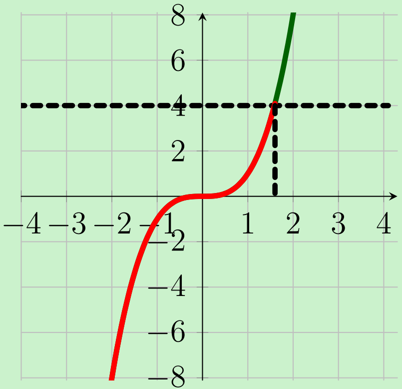
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :



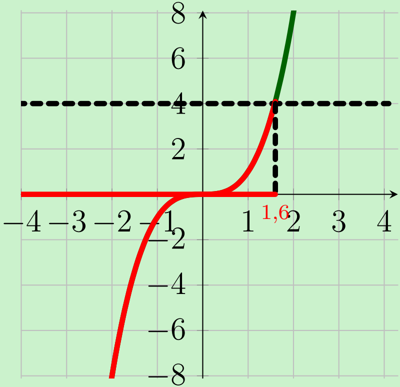
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :



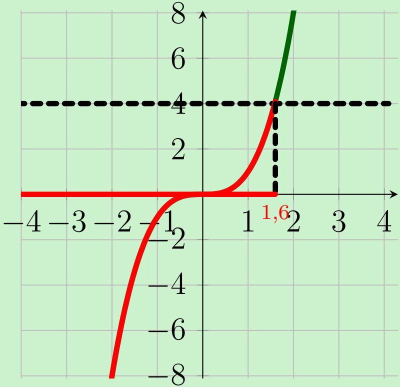
## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :



## Exemple 17

Résolution graphique de $x^3 < 4$ :




donc $x^3 < 4$ quand $x \in \ ]-\infty\,;\,1,6[$ environ.

## Exemple 17

Solutions exactes de $x^3 = 4$ :

## Exemple 17

Solutions exactes de $x^3 = 4$ :

$x^3 = 4$

## Exemple 17

Solutions exactes de $x^3 = 4$ :
$x^3 = 4 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

## Exemple 17

Solutions exactes de $x^3 = 4$ :
$x^3 = 4 \iff x = \sqrt[3]{4}$.

Solutions exactes de $x^3 < 4$ :

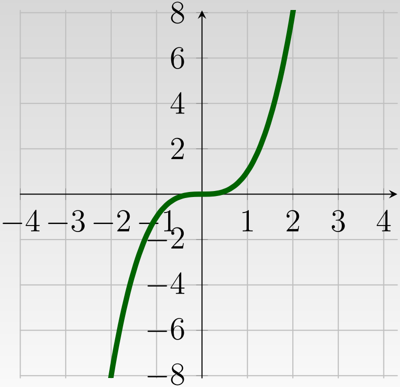
### Exemple 17

Solutions exactes de $x^3 = 4$ :
$x^3 = 4 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

Solutions exactes de $x^3 < 4$ :
en observant la courbe, $x^3 < 4 \Longleftrightarrow x \in \left] -\infty\ ;\ \sqrt[3]{4} \right[$ .

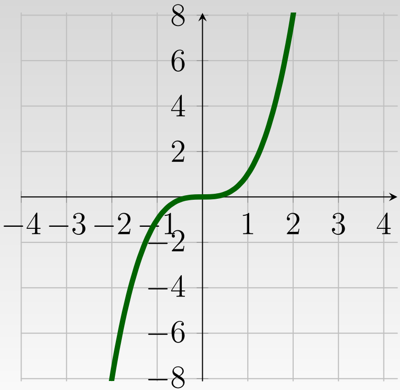
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^3 = -6$.



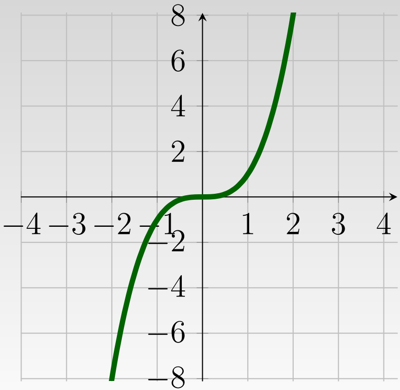
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^3 < 3$.



# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $x^3 > -2$.



# Partie exercices

Exercices 56, 57 page 197
Exercice 101 page 204

# IV – Fonction racine carrée

## 1°) Définition, images et antécédents

(D) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$.

# Ne pas noter

Important : la fonction racine carrée n'est pas définie sur $]-\infty\,;\,0[$ .
Par exemple, $\sqrt{-5}$ n'existe pas.

## Exemples 18

- $f(4) = \sqrt{4} = 2\,;$

### Exemples 18

- $f(4) = \sqrt{4} = 2\,;$
- $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\,;$

## Exemples 18

- $f(4) = \sqrt{4} = 2$ ;
- $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ;
- $f(10^{-6}) = \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$.

# Ne pas noter

**Remarque**

L'antécédent d'un nombre par la fonction racine carrée est son image par la fonction carré.

### Exemple 19

Antécédent de 1 :

## Exemple 19

Antécédent de 1 : $1^2 = 1$.

Antécédent de 3 :

## Exemple 19

Antécédent de 1 : $1^2 = 1$.
Antécédent de 3 : $3^2 = 9$.
Antécédent de $-2$ :

## Exemple 19

Antécédent de 1 : $1^2 = 1$.
Antécédent de 3 : $3^2 = 9$.
Antécédent de $-2$ : il n'y en a pas car une racine ne peut être négative.

Antécédent de $\frac{1}{4}$ :

### Exemple 19

Antécédent de 1 : $1^2 = 1$.
Antécédent de 3 : $3^2 = 9$.
Antécédent de $-2$ : il n'y en a pas car une racine ne peut être négative.
Antécédent de $\frac{1}{4}$ : $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

# Partie exercices

Exercices 58 à 62 page 197.

# Ne pas noter

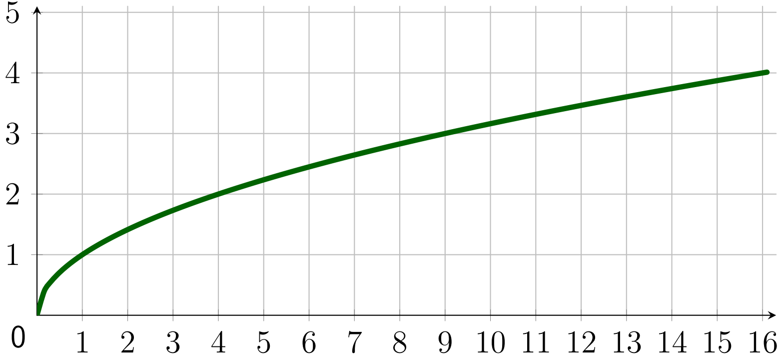
## Remarque

La fonction racine carrée n'est pas une fonction *linéaire*, par exemple le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0$ | $1$ | $2$ |

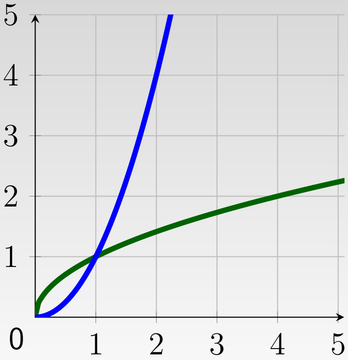
n'est pas un tableau de proportionalité.

# 2°) Courbe représentative de la fonction racine carrée



# Ne pas noter

Cette courbe est la symétrique d'une partie de la courbe de la fonction carré, c'est donc une demi-parabole :



# Partie exercices

Exercice 65 page 197.

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 20**

$2 < 5$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{5}$

# Ne pas noter

Comparons maintenant les images de deux nombres.
En observant la courbe, nous constatons que si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (il y a bien sûr une vraie démonstration !) : deux nombres sont rangés dans le même ordre que leur image.

**Exemples 20**

$2 < 5$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{5}$
$1 > 0,5$ donc $\sqrt{1} > \sqrt{0,5}$.

# 3°) Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$

P Si $0 \leqslant a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

# Partie exercices

Exercice 66 page 197

# 4°) Résolution d'(in)équations

## Exemple 21

Résoudre $\sqrt{x} = 3$ puis $\sqrt{x} = -1$.

# 4°) Résolution d'(in)équations

**Exemple 21**

Résoudre $\sqrt{x} = 3$ puis $\sqrt{x} = -1$.

Réponses :

# 4°) Résolution d'(in)équations

## Exemple 21

Résoudre $\sqrt{x} = 3$ puis $\sqrt{x} = -1$.

Réponses :

$\sqrt{x} = 3 \iff x = 3^2 \iff x = 9.$

# 4°) Résolution d'(in)équations

**Exemple 21**

Résoudre $\sqrt{x} = 3$ puis $\sqrt{x} = -1$.

Réponses :

$\sqrt{x} = 3 \Longleftrightarrow x = 3^2 \Longleftrightarrow x = 9$.

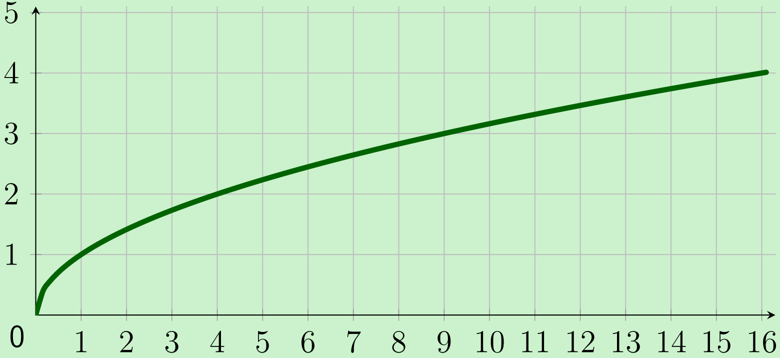
$\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution car une racine carrée est positive.

**Exemple 22**

Résoudre $\sqrt{x} < 2$.

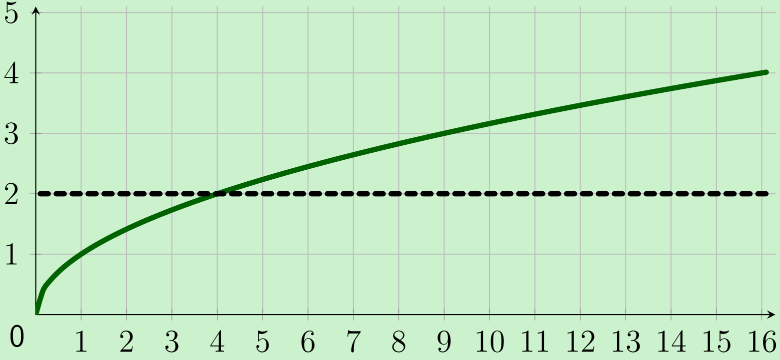
## Exemple 22

Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :



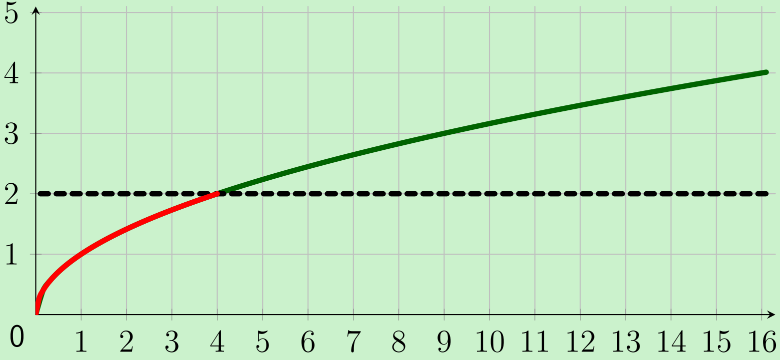
## Exemple 22

Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :



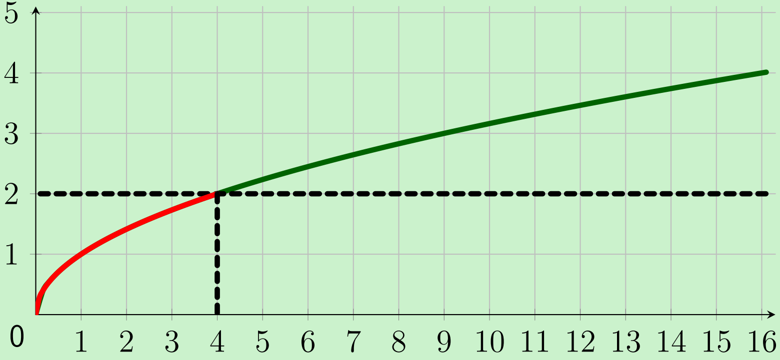
## Exemple 22

Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :



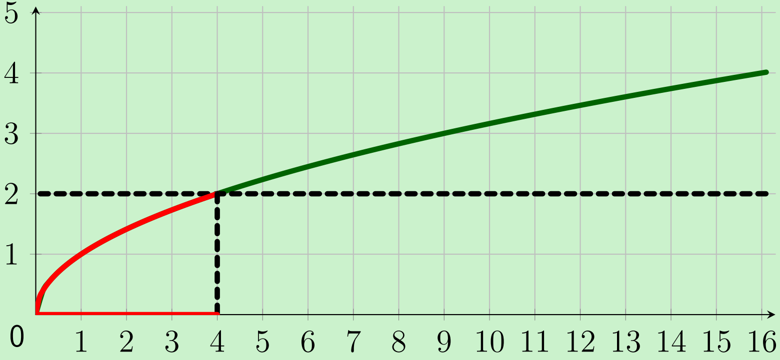
## Exemple 22

Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :



## Exemple 22

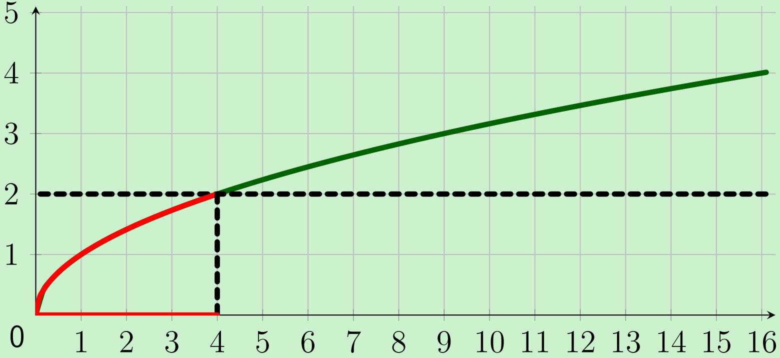
Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :




donc $\sqrt{x} < 2 \iff x \in [\,0\,;\,4\,[$ .

## Exemple 22

Résolution graphique de $\sqrt{x} < 2$ :

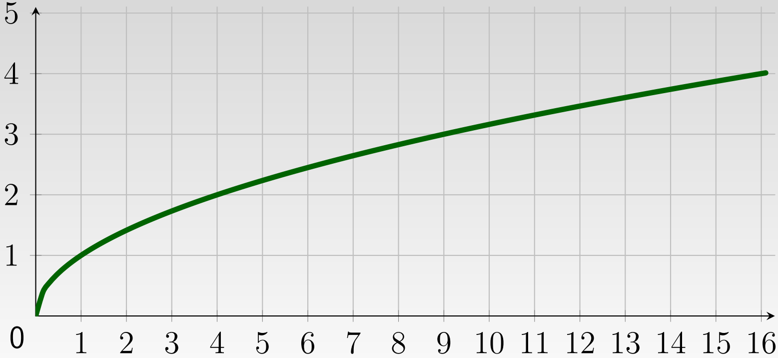



donc $\sqrt{x} < 2 \iff x \in [\,0\,;\,4\,[$ .

Attention : $\sqrt{x} < 2 \not\Leftrightarrow x < 4$ car $x$ pourrait alors être négatif.

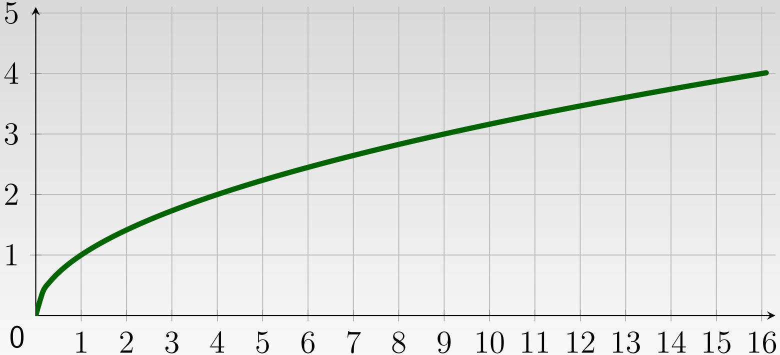
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\sqrt{x} = 4$.



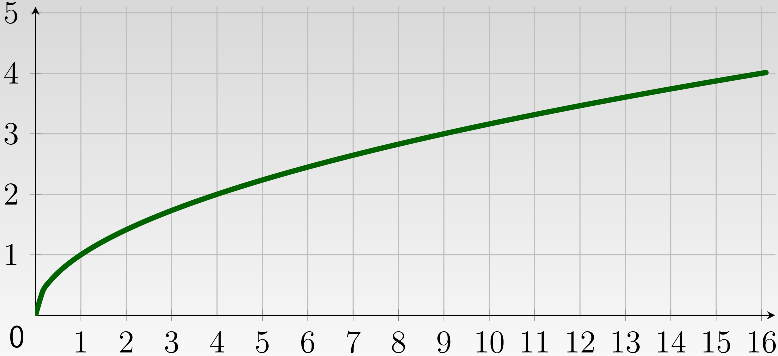
# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\sqrt{x} < 3$.



# Questions rapides (ne pas noter)

Résoudre $\sqrt{x} \geqslant 1,5$.



# Partie exercices

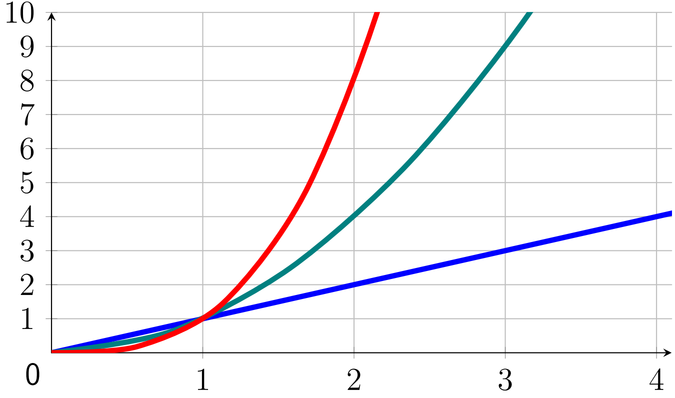
Exercice 68 page 197
Exercice 94 et 97 page 203 (logique)

# V – Comparaisons de quelques fonctions

Étudions la position relative des courbes des trois fonctions $f_1(x) = x$ ; $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

# V – Comparaisons de quelques fonctions

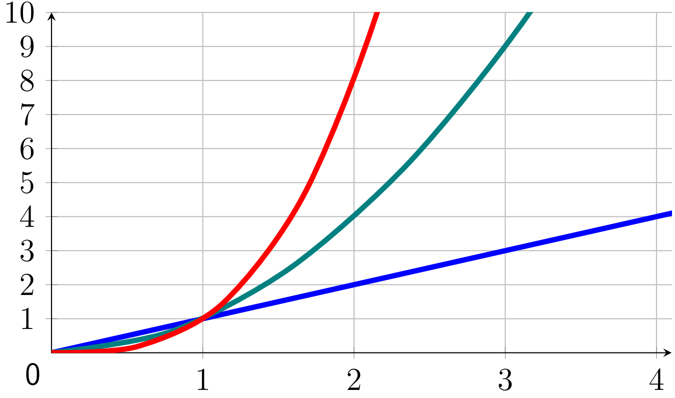
Étudions la position relative des courbes des trois fonctions $f_1(x) = x$ ; $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$.




D'après ce graphique :

# V – Comparaisons de quelques fonctions

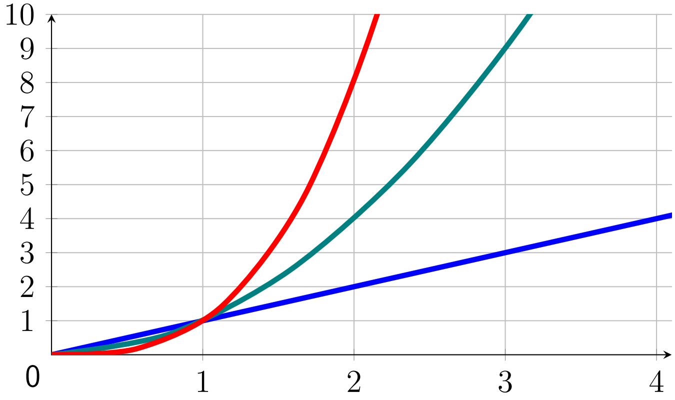
Étudions la position relative des courbes des trois fonctions $f_1(x) = x$ ; $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$.




D'après ce graphique : sur $[\,0\ ;\ 1\,]$ : $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$

# V – Comparaisons de quelques fonctions

Étudions la position relative des courbes des trois fonctions $f_1(x) = x$ ; $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$.




D'après ce graphique : sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$
et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^3 \geqslant x^2 \geqslant x$.

# Ne pas noter

Nous allons prouver cela. Pour cela deux remarques sont utiles :

# Ne pas noter

Nous allons prouver cela. Pour cela deux remarques sont utiles :

- la courbe d'une fonction $f$ est au dessus de celle d'une fonction $g$ quand $f(x) > g(x)$ (logique, non ?) ;

# Ne pas noter

Nous allons prouver cela. Pour cela deux remarques sont utiles :

- la courbe d'une fonction $f$ est au dessus de celle d'une fonction $g$ quand $f(x) > g(x)$ (logique, non ?) ;
- dire que $f(x) > g(x)$ revient à dire que $f(x) - g(x) > 0$ : il suffit donc de calculer $f(x) - g(x)$ et de voir quand le résultat est positif.

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1 - x)$ (factorisation).

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1 - x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1 - x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_2(x) - f_3(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$ (factorisation).

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_2(x) - f_3(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ (factorisation).
Or $x^2 \geqslant 0$ donc

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1 - x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_2(x) - f_3(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$ (factorisation).
Or $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - x^3 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_2(x) - f_3(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ (factorisation).
Or $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - x^3 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$

# Ne pas noter

Comparaison de $f_1(x) = x$ et de $f_2(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 = x(1-x)$ (factorisation).
Ici $x \geqslant 0$ donc $x - x^2 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^2 \geqslant x$.

Comparaison de $f_2(x) = x^2$ et de $f_3(x) = x^3$ pour $x \geqslant 0$ :
$f_2(x) - f_3(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ (factorisation).
Or $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - x^3 \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$ donc,
sur $[\,0\,;\,1\,]$ : $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ : $x^3 \geqslant x^2$.

# Partie exercices

Exercice 86 page 201.
Exercice 91 page 202.
Exercice 82 page 201.