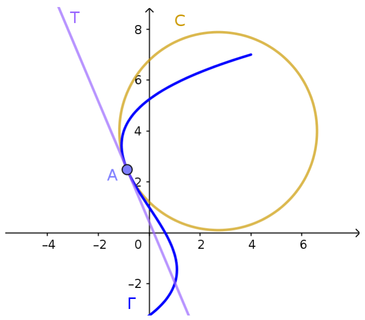
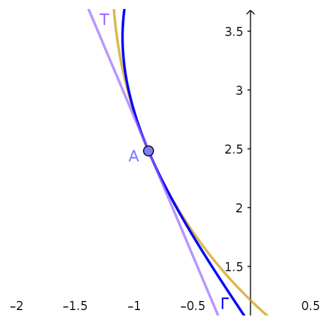
TP : approximation locale d'une courbe

Quand on observe une portion d'une courbe Γ au voisinage d'un de ses points A, elle peut ressembler à un segment. On peut donc, au voisinage de ce point, approximer la courbe par une droite, qu'on appelle la tangente T à la courbe Γ. Cependant, l'approximation locale sera meilleure si on remplace la droite par un cercle C, qu'on appelle le cercle de courbure ou cercle osculateur.





Exercice 0 : préparation à la suite

<u>Rappels :</u>

– si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite alors le coefficient directeur m de cette droite est $m=\dfrac{Y}{X}$, si $X \neq 0$;

– l'équation réduite d'une droite (non « verticale ») est $y = m\,x + p$;

– l'ordonnée à l'origine p est alors $p = y - m\,x$; où x et y sont les coordonnées d'un point de la droite.

Trouvez l'équation de la droite passant par A (– 1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la suite du TP, on considère la courbe Γ définie par : $\begin{cases} x(t)=\sin^3 t \\ y(t)=\cos t-\cos^4 t \end{cases}$ pour $t \in [0 ; 2\pi]$.

Exercice 1 : tangentes et vecteurs tangents

1°) Faîtes tracer Γ.
Placez le point A de paramètre $t = \pi / 4$.

2°) Demandez l'équation de la tangente T à la courbe Γ en A, sous la forme $y = m\,x + p$.
L'équation est-elle exacte, selon vous ?

3°) En utilisant la partie « Calcul formel », demandez une équation exacte de T.
Que peut-on dire du résultat ?

Rappel :

– pour une courbe paramétrée, le vecteur dérivé $\vec{M}'(t)\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$, s'il est non nul, est un vecteur directeur de la tangente à la courbe ;

– le coefficient directeur m de la tangente au point de paramètre t est $m=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, si $x'(t) \neq 0$.

4°) Dans la partie « Calcul formel », tapez :

b(t):=Dérivée(a(t))

(si la courbe s'appelle « a ») pour obtenir les coordonnées de $\vec{M}'(t)$.
Déduisez-en les coordonnées d'un vecteur tangent à Γ en A.
Tracez ce vecteur (il doit partir de A).

5°) Déterminez l'équation exacte de T.
(vérifiez la cohérence avec le 2°))

6°) Donnez l'équation exacte de la tangente à Γ en son point B de paramètre $t=\dfrac{-2\pi}{3}$.

Exercice 2 : normales et vecteurs normaux

Définition : la normale à une courbe Γ en un de ses points A est la droite perpendiculaire à la tangente, passant par A.

1°) Donnez une équation approximative de la normale à Γ en A.

Propriété : l'image d'un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ par une rotation de 90° est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-Y\\ X\end{pmatrix}$.

2°) Donnez les coordonnées exactes d'un vecteur normal à Γ en A.

3°) a) Déduisez-en le coefficient directeur exact de la normale à Γ en A.
b) Déduisez-en une équation exacte de la normale à Γ en A.

4°) Cherchez l'équation exacte de la normale à Γ en B.

Exercice 3 : cercle osculateur

On utilise la commande CercleOsculateur() dans le mode « Calcul formel ».

1°) Affichez les cercles osculateurs à la courbe Γ en A et en B.

2°) a) Trouvez les rayons approximatifs de ces deux cercles.
b) Lequel a le plus grand rayon ? Était-ce prévisible ?

3°) Quel lien y a-t-il entre un cercle osculateur et une normale ?