Exercices : Lignes trigonométriques

Formules diverses :

$$\boxed{\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (a \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi)}$$

$$\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$$

Parité :

$\boxed{\cos(-a) = \cos a}$ $\boxed{\sin(-a) = -\sin a}$ $\boxed{\tan(-a) = -\tan a}$

Périodicité :

$$\boxed{\cos(a+2\pi) = \cos a,\ \sin(a+2\pi) = \sin a \text{ et } \tan(a+\pi) = \tan a}$$

Angles associés :

$$\boxed{\cos(a+\pi) = -\cos a \quad \text{et} \quad \sin(a+\pi) = -\sin a}$$

$$\boxed{\cos(\pi - a) = -\cos a \quad \text{et} \quad \sin(\pi - a) = \sin a}$$

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a}$ $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a}$

Formules d'addition et de soustraction :

$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$ $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$

$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$ $\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$

Formules de duplication :

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$$

$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}}$ et $\boxed{\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$$

Exercice I

Écrire en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les nombres A et B suivants :

$$A = \sin(6\pi + x) + \cos(x+\pi) - 3\sin(3\pi - x)$$

$$B = \cos(x - 5\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

Exercice II

1°) Vérifiez que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

2°) Sachant que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculez $\cos\frac{\pi}{12}$ puis $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice III

1°) Soit a tel que $\cos a = \frac{1}{3}$ et $a \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
Donner la valeur exacte de $\sin a$ et de $\tan a$.

2°) Soit a tel que $\sin a = \frac{1}{4}$ et $a \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
Donner la valeur exacte de $\cos a$ et de $\tan a$.

3°) Déterminer tous les réels a tels que $\cos a + \sin a = 1$.

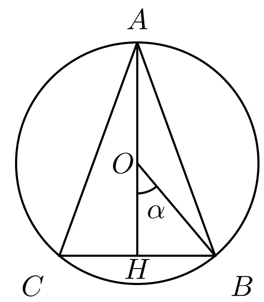
Exercice IV

Résoudre dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,]$ les inéquations suivantes :

1°) $6\cos x + 3 > 0$	2°) $\sin^2 x \leqslant \frac{1}{4}$
3°) $\cos 2x \geqslant -\frac{1}{2}$	4°) $\sin 2x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice V

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A. Ce triangle est inscrit dans un cercle de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A.
On pose $\alpha = \widehat{HOB}$ et on suppose que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



1°) Exprimer BC et HA en fonction de α.

2°) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α.

3°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha).$$

Étudier les variations de f.

4°) Montrer qu'il existe une valeur de α, à déterminer, telle que l'aire du triangle ABC soit maximale.
Quelle est cette aire et la nature du triangle ABC ?

Exercice VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos^4 x + \sin^4 x - 1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm.

1. Montrer que f est π–périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}$.
   Donner une équation de chaque axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
4. Calculer la dérivée de f et montrer que sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ elle est du signe de $(1 - 2\cos x)$.
5. En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Construire $\mathscr{C}_0$ l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ pour x dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Expliquer comment, à partir de $\mathscr{C}_0$, construire toute la courbe $\mathscr{C}$.
7. Construire $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos^4 x + \sin^4 x - 1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm.

1. Montrer que f est π–périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}$.
   Donner une équation de chaque axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
4. Calculer la dérivée de f et montrer que sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ elle est du signe de $(1 - 2\cos x)$.
5. En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Construire $\mathscr{C}_0$ l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ pour x dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Expliquer comment, à partir de $\mathscr{C}_0$, construire toute la courbe $\mathscr{C}$.
7. Construire $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.