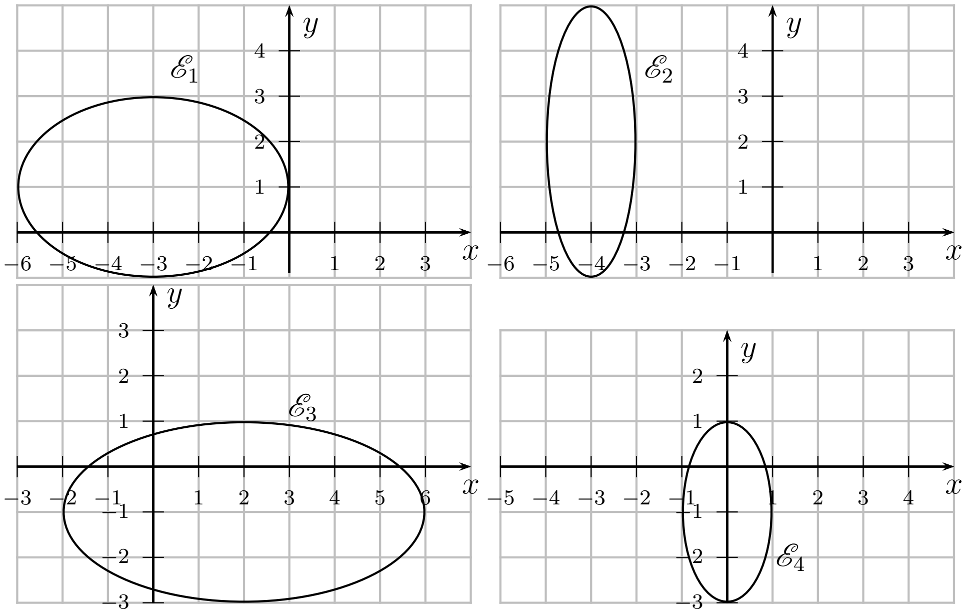
Exercices : Ellipses

Exercice I (équation d'une ellipse)

1°) Donnez les équations des quatre ellipses représentées ci-dessous.



2°) Déterminez les points d'intersection de $\mathscr{E}_3$ avec les axes de coordonnées.

3°) Écrivez les équations des ellipses $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_4$ sous la forme $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ où a, b, c, d, e sont des entiers.

Exercice II (éléments caractéristiques d'une ellipse)

Soit, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

1°) Donnez les coordonnées du centre de $\mathscr{E}$, son demi petit axe et son demi grand axe.

2°) Précisez l'axe focal, les sommets et les foyers de cette conique.

3°) Vérifiez vos réponses avec la calculatrice en mode « Conique ».

Exercice III

Pour chacune des équations suivantes :

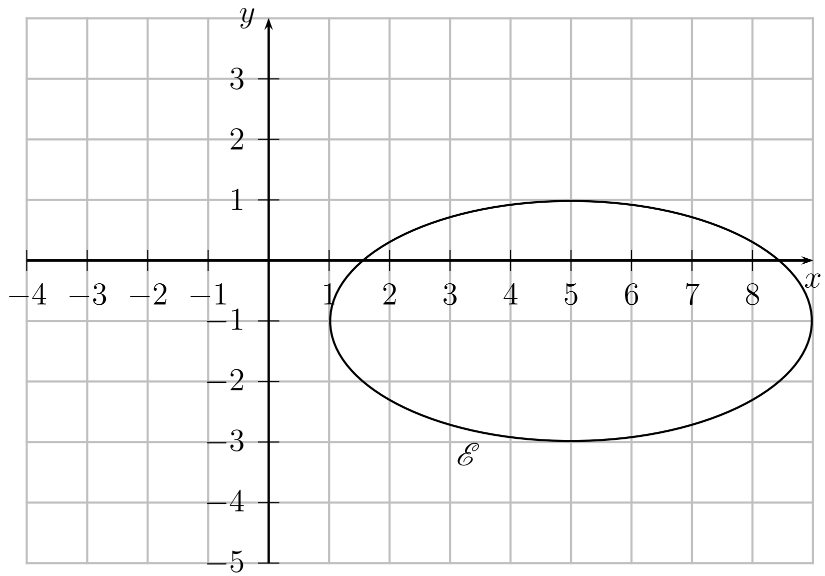
a) déterminez s'il s'agit d'une équation d'ellipse ;

b) si oui, précisez ces éléments : centre, axe focal, sommets, foyers.

1°) $2x^2 + y^2 - 2 = 0$	2°) $x + 3y^2 = 1$
3°) $x^2 = y^2 - 2$	4°) $(3x+1)^2 + y^2 = 1$
5°) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$	6°) $3x^2 - 12x + y^2 + 9 = 0$

Exercice IV (tangente à une ellipse)

1°) Dessinez avec précision la tangente (T) à l'ellipse en son point d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.



2°) a) Écrivez l'équation de l'ellipse.

b) Isolez y en fonction de x. On appelera f la fonction obtenue.

c) Calculez $f'(x)$ (éventuellement avec la calculatrice).

d) Déduisez-en l'équation réduite de la tangente (T).

Supplément : ellipses

Extrait du sujet 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = \dfrac{x^2}{4}$.

3°) a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ admet pour foyer le point F, de coordonnées $(0\,;\,1)$.

b) Tracer $(\mathscr{P})$.

4°) Pour tout réel t non nul, on considère le point M de $(\mathscr{P})$ d'abscisse t. On note H le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

a) Déterminer, en fonction de t, une équation cartésienne de chacune des droites (OM) et (FH).

b) Montrer que le point d'intersection de ces deux droites appartient à la courbe $(\mathscr{E})$ d'équation $x^2 + (2y-1)^2 = 1$.

c) Préciser la nature de $(\mathscr{E})$, son centre et ses sommets.
(*On ne demande pas son tracé sur la copie*).

5°) Soit (D) la droite perpendiculaire à (OM) et passant par H.

a) Déterminer une équation cartésienne de (D).
En déduire qu'elle passe par un point fixe Ω, dont on précisera les coordonnées.

b) On note Q le point d'intersection des droites (D) et (OM).
Montrer que Q appartient au cercle $(\mathscr{C})$, d'équation

$$x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Tracer $(\mathscr{C})$ sur le même graphique que $(\mathscr{P})$.

Supplément : ellipses

Extrait du sujet 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = \dfrac{x^2}{4}$.

3°) a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ admet pour foyer le point F, de coordonnées $(0\,;\,1)$.

b) Tracer $(\mathscr{P})$.

4°) Pour tout réel t non nul, on considère le point M de $(\mathscr{P})$ d'abscisse t. On note H le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

a) Déterminer, en fonction de t, une équation cartésienne de chacune des droites (OM) et (FH).

b) Montrer que le point d'intersection de ces deux droites appartient à la courbe $(\mathscr{E})$ d'équation $x^2 + (2y-1)^2 = 1$.

c) Préciser la nature de $(\mathscr{E})$, son centre et ses sommets.
(*On ne demande pas son tracé sur la copie*).

5°) Soit (D) la droite perpendiculaire à (OM) et passant par H.

a) Déterminer une équation cartésienne de (D).
En déduire qu'elle passe par un point fixe Ω, dont on précisera les coordonnées.

b) On note Q le point d'intersection des droites (D) et (OM).
Montrer que Q appartient au cercle $(\mathscr{C})$, d'équation

$$x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Tracer $(\mathscr{C})$ sur le même graphique que $(\mathscr{P})$.