Suppléments : Équations de droites dans le plan

Exercice I (équations de droites dans le plan)
Soient, dans un repère orthonormé $(O\ ; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$ du plan, les points
$A\,(2\,;\,-3)$, $B\,(0\,;\,4)$, $C\,(-1\,;\,-2)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite (AB).

2°) On cherche maintenant la distance entre le point C et la droite (AB).
a) Donner un vecteur normal à la droite (AB).
b) En déduire une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par C.
c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB) puis la distance recherchée.
d) Vérifier avec la formule suivante : $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ donnant la distance entre le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$ et la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exercice II
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$. Soit une droite variable (D_t) (où t est un réel quelconque), d'équation $y = tx + 1 - 2t$.

1°) Tracer les droites (D_0), (D_1), (D_{-2}).
Que remarque-t-on ? Justifier.

2°) Soit la droite (Δ_t), passant par O et perpendiculaire à (D_t).
a) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ_t).
b) Tracer les droites (Δ_0), (Δ_1), (Δ_{-2}).

3°) On note M_t le point d'intersection de (D_t) et de (Δ_t).
a) Prouver que les coordonnées de M_t s'écrivent :

$$x = \frac{2t^2 - t}{t^2+1} \qquad y = \frac{-2t+1}{t^2+1}.$$

b) Placer les points M_0, M_1, M_{-2}.
Montrer que ces trois points sont sur un cercle de centre $\Omega\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4°) Prouver que les coordonnées de M_t vérifient $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. (indication : éliminer t).