Exercice sur le repère de Frenet et la courbure

Soit $\mathscr{C}$ la courbe du plan d'équation

$$xy^2 + 6xy + 8x = y^2 + 7y + 10$$

1°) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2°) Déterminer le repère de Frenet au point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 et d'ordonnée différente de -2.
Construire ce repère.

3°) Calculer en fonction de x le rayon de courbure $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$.

4°) a) Calculer R pour $x = 2$.
b) Construire le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = R\vec{N}$.
c) Construire le cercle de centre Ω et de rayon R.

5°) a) Calculer la dérivée de R par rapport à x.
b) Prouver que R' est du signe de $x(x-2)$.
c) En déduire les variations de R en fonction de x.

Exercice sur le repère de Frenet et la courbure

Soit $\mathscr{C}$ la courbe du plan d'équation

$$xy^2 + 6xy + 8x = y^2 + 7y + 10$$

1°) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2°) Déterminer le repère de Frenet au point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 et d'ordonnée différente de -2.
Construire ce repère.

3°) Calculer en fonction de x le rayon de courbure $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$.

4°) a) Calculer R pour $x = 2$.
b) Construire le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = R\vec{N}$.
c) Construire le cercle de centre Ω et de rayon R.

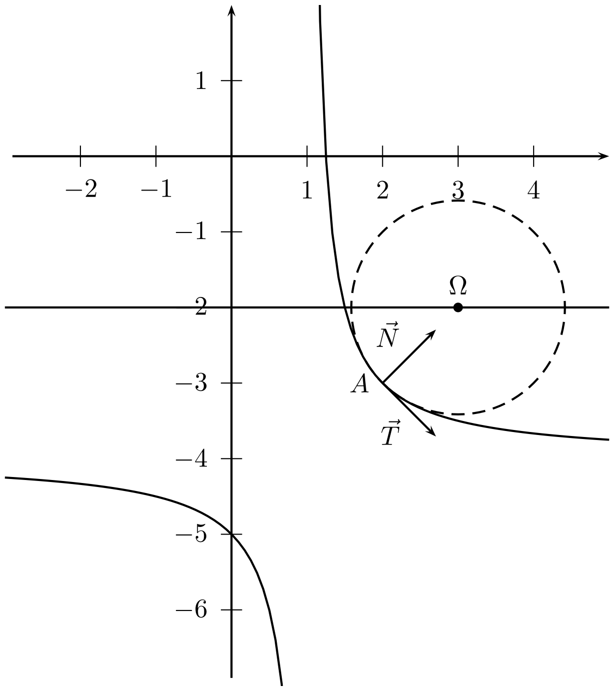
5°) a) Calculer la dérivée de R par rapport à x.
b) Prouver que R' est du signe de $x(x-2)$.
c) En déduire les variations de R en fonction de x.

Corrigé (exercice sur le repère de Frenet et la courbure)

1°) On regroupe les termes en y :

$$(x-1)y^2+(6x-7)y+8x-10=0.$$

On calcule le discriminant :
$\Delta=(6x-7)^2-4(x-1)(8x-10)=4x^2-12x+9=(2x-3)^2$.
Donc $(\ldots)$ $y=-2$ ou $y=\dfrac{5-4x}{x-1}$.



2°) Si l'ordonnée est différente de -2 alors $y=\dfrac{5-4x}{x-1}$ et on a affaire à une courbe de fonction. Un vecteur directeur de la tangente a donc pour coordonnées $\binom{1}{y'(2)}$. Or $(\ldots)$ $y'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ donc $y'(2)=-1$. Le vecteur de coordonnées $\binom{1}{-1}$ dirige la tangente, a pour norme $\sqrt{2}$ donc $\vec{T}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{N}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

3°) On a $y''=2/(x-1)^3$ donc $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\dfrac{\left(1+\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)^2\right)^{3/2}}{2/(x-1)^3}=\left(\dfrac{(x-1)^4+1}{(x-1)^4}\right)^{3/2}\times\dfrac{(x-1)^3}{2}=\dfrac{\left((x-1)^4+1\right)^{3/2}}{(x-1)^6}\times\dfrac{(x-1)^3}{2}=\dfrac{1}{2(x-1)^3}\left[(x-1)^4+1\right]^{3/2}$.

4°) a) Pour $x=2$, $R=\sqrt{2}$.

b) Les coordonnées de A sont $(2\,;-3)$. La relation $\overrightarrow{A\Omega}=R\vec{N}$ donne alors

$$x_\Omega-2=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1 \text{ donc } x_\Omega=3 \text{ et } y_\Omega+3=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1 \text{ donc } y_\Omega=-2.$$

5°) a) $R=\dfrac{\left[(x-1)^4+1\right]^{3/2}}{2(x-1)^3}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec

$$\begin{aligned}u' &= \frac{3}{2}\times 4(x-1)^3\times\left[(x-1)^4+1\right]^{(3/2)-1}\\ &= 6(x-1)^3\sqrt{(x-1)^4+1}\end{aligned}$$

et $v'=6(x-1)^2$. Donc

$$\begin{aligned}R' &= \frac{u'v-uv'}{v^2}\\ &= \frac{6(x-1)^3\sqrt{(x-1)^4+1}\times 2(x-1)^3-\left[(x-1)^4+1\right]^{3/2}\times 6(x-1)^2}{4(x-1)^6}\\ &= \frac{3}{2}\times\sqrt{(x-1)^4+1}\times\frac{1}{(x-1)^4}\times\left[2(x-1)^4-\left[(x-1)^4+1\right]\right]\\ &= \frac{3\sqrt{(x-1)^4+1}}{2(x-1)^4}\times\left[(x-1)^4-1\right].\end{aligned}$$

b) Le signe de R' est celui de $[(x-1)^4-1]$. Or :

$$\begin{aligned}(x-1)^4-1 &= ((x-1)^2)^2-1^2=[(x-1)^2-1][(x-1)^2+1]\\ &= [(x-1)-1][(x-1)+1][(x-1)^2+1]\\ &= x(x-2)[(x-1)^2+1].\end{aligned}$$

qui est bien du signe de $x(x-2)$.

c) Variations de R (signe de $-a$ entre les racines 0 et 2) :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$