Exercices : Longueur d'un arc, courbure

Exercice I

Soit Γ la courbe paramétrée définie sur $[0\,;\,1]$ par $\begin{cases} x(t) = 3-4t \\ y(t) = 5-3t \end{cases}$.

1°) Calculez la longueur de Γ.

2°) Soient $A\ (3\,;\,5)$ et $B\ (-1\,;\,2)$. Prouvez que Γ est en fait le segment $[AB]$ et retrouvez le résultat du 1°).

Exercice II

Soit Γ la courbe paramétrée définie sur $[-1\,;\,1]$ par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t) \end{cases}.$$

1°) Étudiez la parité de x et de y (on admet que la fonction arcsin est impaire). Déduisez-en une symétrie pour Γ.

2°) a) Calculez la dérivée de h, définie sur $]-1\,;\,1[$ par $h(t) = \sqrt{1-t^2}$.

b) Calculez la longueur de Γ.

Exercice III (spirale logarithmique)

Soit Γ la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(t) \\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(t) \end{cases}$.

1°) Calculez la longueur $\ell(a)$ de l'arc de Γ pour t entre 0 et a.

2°) Quelle est la limite de $\ell(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Exercice IV (astroïde)

Soit Γ la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$.

1°) Étudiez la périodicité de x et de y.

2°) Étudiez la parité de x et de y.

3°) Calculez $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$.

4°) Que peut-on déduire de 1°), 2°), 3°) concernant le calcul de ℓ ?

5°) Prouvez que $x'^2(t) + y'^2(t) = \dfrac{9}{4}\sin^2(2t)$.

6°) Calculez ℓ.

Formulaire

Dérivées des fonctions de base

Si $f(x) = \ldots$	alors $f'(x) = \ldots$	quand $x \in \ldots$
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \geqslant 0)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - (2n+1).\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
$\ln x$	$1/x$	$]\,0\,;\,+\infty\,[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations algébriques et dérivées

$\boxed{(u+v)' = u'+v'}$ $\boxed{(k.u)' = k.u'}$ $\boxed{(u.v)' = u'v+v'u}$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}}$ $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}}$ $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$

$\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$ $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$ $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u}$.

Quelques formules en trigonométrie

$$\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$$

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$$

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}.$$

Exercice V

1°) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = \cos x$.

a) Compléter le tableau de valeurs et construire le morceau de $\mathscr{C}$ correspondant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y					

b) Définir et construire le repère de Frenet au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

2°) Soit $\mathscr{C}$ la courbe de représentation paramétrique $x = 3t^2 - 1$, $y = \frac{1}{t}$ (pour $t > 0$).

a) Compléter le tableau de valeurs et construire le morceau de $\mathscr{C}$ correspondant :

t	0,5	0,75	1	1,25	1,5
x					
y					

b) Définir et construire le repère de Frenet au point d'abscisse 2.

Exercice VI

Déterminer le rayon de courbure, le centre et le cercle de courbure (les construire également) pour les deux courbes de l'exercice V (aux points choisis dans cet exercice V).

Exercice VII (extrait du sujet 2012)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère la courbe Γ dont chaque point M_t a pour coordonnées :

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) &= 2(1+\cos t) \\ y(t) &= (1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

1. **Réduction de l'intervalle d'étude**
   (a) Déterminer la périodicité des fonctions x et y.
   (b) Étudier la parité des fonctions x et y. Quelle propriété de la courbe Γ peut-on en déduire ?
   (c) Montrer que l'intervalle d'étude peut être réduit à l'intervalle $J = [0 \,;\, \pi]$.
2. **Étude de la courbe Γ**
   (a) Montrer que :
   $$t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = -2\sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = (2\cos t - 1)(1+\cos t)$$
   (b) Étudier le signe de $x'(t)$ et celui de $y'(t)$ sur l'intervalle J, puis dresser le tableau de variations complet des fonctions x et y sur l'intervalle J.
3. **Étude de la courbure**
   On admet que : $\begin{cases} x''(t) = -2\cos t \\ y''(t) = -4\sin t\cos t - \sin t \end{cases}$
   (a) Déterminer le rayon de courbure R de la courbe Γ au point A de paramètre t égal à $\frac{\pi}{3}$.
   Rappel : $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$.
   (b) Montrer que le vecteur directeur unitaire de la tangente à Γ en A est le vecteur $-\vec{\imath}$.
   (c) Donner le vecteur unitaire $\vec{n}$ tel que le repère $(A \,;\, -\vec{\imath}, \vec{n})$ soit orthonormal direct.
   (d) En déduire les coordonnées du centre de courbure G de la courbe Γ au point A.
4. **Tracé de la courbe Γ**
   (a) On admettra que la tangente à la courbe Γ au point de paramètre t égal à π est horizontale. Tracer la courbe Γ.
   (b) Tracer le cercle de courbure au point A.