# Suppléments : Courbes paramétrées planes

**Exercice I**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère la courbe paramétrée C d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t(1+\cos t) \end{cases}$$

**1°)** Justifier que l'intervalle d'étude peut se réduire à $[0\,;\pi]$.

**2°) a)** Étudier les variations de la fonction $x(t)$ sur $[0\,;\pi]$.

**b)** Prouver que, pour tout $t$ de $[0\,;\pi]$, on a : $y'(t) = 2\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

**c)** En déduire les variations de la fonction $y$ sur $[0\,;\pi]$.

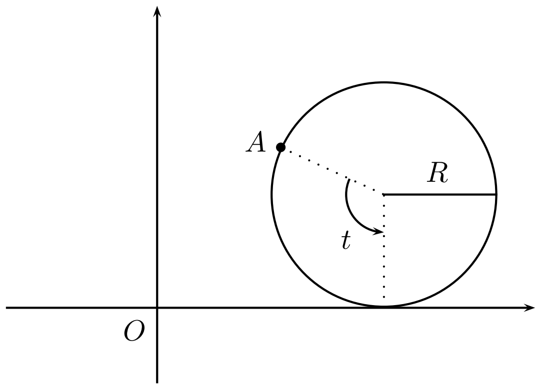
**3°)** Déterminer les tangentes horizontales et verticales à la courbe C.

**4°)** Construire ces tangentes puis la courbe C.

**Exercice II (cycloïde)**

La cycloïde est la trajectoire d'un point $A$ donné d'une roue lorsque celle-ci roule sur un sol plat. On suppose que pour $t = 0$ alors le point $A$ est en $O$.

On démontre que la trajectoire décrite par ce point $A$ a pour représentation paramétrique (si la roue a pour rayon 5…) $x(t) = 5(t-\sin t)$ et $y(t) = 5(1-\cos t)$.




**1°)** Comment passe-t-on du point de paramètre $t$ au point de paramètre $t+2\pi$ ? En déduire intervalle d'étude suffisant pour l'étude des variations de $x$ et de $y$ et pour le tracé de la trajectoire.

**2°)** En étudiant la parité des fonctions $x$ et $y$, réduire encore cet intervalle.

**3°)** Étudier les variations des fonctions $x$ et $y$ sur l'intervalle $[\,0\,;\,\pi\,]$ puis sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

**4°)** Préciser les tangentes pour $t = 0$, $t = \pi$, $t = -\pi$.

**5°)** Tracer la trajectoire.

**Exercice III (du polaire au cartésien)**

Soit la courbe $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = \cos\theta$, où $\theta$ est un réel quelconque.

**1°)** Établir un intervalle suffisant pour l'étude de la courbe $\Gamma$.

**2°) a)** Écrire les coordonnées cartésiennes d'un point de $\Gamma$ en fonction de $\theta$. On obtient ainsi une représentation paramétrique de $\Gamma$.

**b)** Étudier les variations des fonctions coordonnées lorsque $\theta$ varie.

**c)** Donner les équations des tangentes à la courbe $\Gamma$ pour les valeurs de $\theta$ suivantes : 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

**3°)** Tracer $\Gamma$.

**Exercice IV (d'une courbe implicite à une courbe paramétrées)**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ vérifiant

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

On va étudier $\mathscr{C}$ en s'intéressant à l'intersection de $\mathscr{C}$ avec des droites passant par l'origine.

**1°)** Quelle est l'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta$ d'équation $x = 0$ ?

**2°)** On se place maintenant dans le cas d'une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = tx$.

**a)** Exprimer les coordonnées d'un point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$ en fonction de $t$. La courbe $\mathscr{C}$ (privée du point trouvé au 1°) peut être vu comme une courbe paramétrée.

**b)** Étudier les variations des fonctions coordonnées.

**c)** Déterminer les tangentes horizontales et verticales de $\mathscr{C}$.

**3°)** Tracer $\mathscr{C}$.