Exercices : Courbes paramétrées

Exercice I

Pour chacune des courbes paramétrées suivantes :

a) Faîtes le tableau des variations conjointes.

b) Déduisez-en un croquis de la courbe (vérifiez avec votre calculatrice).

1°) $\begin{cases} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = t^2 - 4t + 5 \end{cases}$ où $t \in [-3\,;\,4]$

2°) $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = \ln(1 + t^2) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

3°) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$ où $t \in [0\,;\,2\pi]$

Exercice II

Étudiez la parité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes (pour prouver qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de t telle que $f(-t) \neq f(t)$ et $f(-t) \neq -f(t)$) :

1°) $f_1(t) = 2 - \sin(t)$	2°) $f_2(t) = 5\sin(3t^2)$	3°) $f_3(t) = 3t^4 - 7t^2 + 5$
4°) $f_4(t) = 2\sin(4t)$	5°) $f_5(t) = 2t^3 - t^2$	6°) $f_6(t) = t^3 - t + 1$
7°) $f_7(t) = \cos(t) + \sin(t)$	8°) $f_8(t) = \cos(t)\sin(t)$	9°) $f_9(t) = \cos(5t)$

Exercice III

Étudiez la périodicité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

1°) $f_1(t) = 2 - \sin(t)$	2°) $f_2(t) = 5\sin(3t^2)$	3°) $f_3(t) = 3t^4 - 7t^2 + 5$
4°) $f_4(t) = 2\sin(4t)$	5°) $f_5(t) = 3\cos(t) + 4$	6°) $f_6(t) = \cos(t)\sin(t)$

Exercice IV

Réduire l'intervalle d'étude des courbes paramétrées suivantes :

1°) $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{cases}$ où $t \in [-5\,;\,5]$

2°) $\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Exercice V

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité graphique sur chaque axe : 4 cm), on considère la courbe paramétrée E d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = 2\cos 2t \end{cases}$$

1°) Étudiez la périodicité des fonctions x et y, en déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

2°) Étudiez la parité des fonctions x et y. Quelle symétrie peut-on en déduire pour la courbe E ? Déduisez-en une réduction de l'intervalle d'étude.

3°) Exprimez $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Quelle symétrie peut-on en déduire pour la courbe E ? À quel intervalle I peut-on alors réduire l'étude ?

4°) Faîtes l'étude de cette courbe paramétrée sur l'intervalle réduit obtenu précédemment. Tracez la courbe E.

Exercice VI

On vérifiera les réponses au fur et à mesure avec Geogebra.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 4t + 3 \\ y(t) = t^2 + 6t + 1 \end{cases}$$

où $t \in [-5\,;\,3]$.

1°) Donnez un vecteur directeur des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points de paramètres $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$.

2°) Déterminez les équations de ces tangentes.

3°) Déterminez s'il y a des tangentes horizontales ou verticales.

4°) Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées et les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

5°) Faîtes le tableau des variations conjointes.

6°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

7°) Étudiez les variations de la pente de la tangente quand t varie de -5 à 3.