Cours et Exercices : Coordonnées cartésiennes (3D)

I. Bases. Coordonnées de vecteurs

Définition

Trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ forment une **base de l'espace**.

Propriété 1

Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe trois nombres uniques X, Y, Z tels que $\boxed{\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}}$.

Définition

X, Y, Z sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Exemple 1

Si $\vec{u} = 2\vec{\jmath} - \vec{\imath} + 3\vec{k}$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

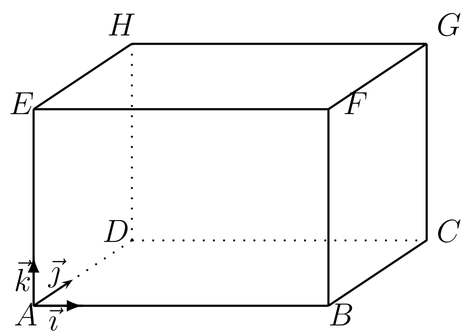
Exercice I (coordonnées dans l'espace)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède dont les dimensions sont $AB = 6$, $AD = 3$ et $AE = 4$.

1°) Placez I, J, K, L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA},$$



$$\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}, \qquad \overrightarrow{BL} = \frac{7}{3}\overrightarrow{BC}.$$

2°) Nous nous plaçons maintenant dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \qquad \vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

Propriétés 2

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ et k un réel. Alors :

— $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}X+X'\\Y+Y'\\Z+Z'\end{pmatrix}$

— $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kX\\kY\\kZ\end{pmatrix}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc si l'une des conditions suivantes est remplie :
– il existe k tel que $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$, $\boxed{Z' = k.Z}$
– les « produits en croix » sont nuls : $\boxed{XY' - X'Y = 0}$ et $\boxed{XZ' - ZX' = 0}$.

Exercice II

1°) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$. Donnez les coordonnées de $-4\vec{u} - 2\vec{v}$.

2°) Les vecteurs $\vec{r}\begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

II. Repères. Coordonnées de points

Définitions

- Un **repère** de l'espace est un quadruple $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ où O est un point et $\left(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ une base.
- Les **coordonnées d'un point** M dans ce repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés 3

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\,;\,\frac{z_A + z_B}{2}\right)}.$$

Exercice III

Soient $E\ (4\,;\,1\,;\,-3)$ et $F\ (2\,;\,5\,;\,0)$.

1°) Calculez les coordonnées du milieu du segment $[EF]$.

2°) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FE}$ et $-3\,\overrightarrow{EF}$.

III. Bases et repères orthonormés

Définitions

- Une base $\left(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ est **orthonormée** si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.
- Un repère $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ est **orthonormé** si la base $\left(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ est orthonormée.

Propriété 4

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans une <u>base orthonormée</u> de l'espace. Alors la norme de $\vec{u}$ (sa longueur) est égale à :

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Propriété 5

Soient $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ dans <u>un repère orthonormé</u>. Alors

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

Exercice IV

Avec la figure de l'exercice I ; nous nous plaçons dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Placez sur la figure le point P de coordonnées $(-8/3\,;\,3\,;\,4)$.

2°) Donnez les coordonnées des points I, J, K, L dans ce repère.

3°) a) Calculez la distance DP.

b) Démontrez que le triangle FDP est rectangle.

4°) En déduire des valeurs approchées de :

a) une mesure en degrés de l'angle $\widehat{PFD}$.

b) la distance entre le point D et la droite (PF).

5°) Bonus : soit $Q\ (-9\,;\,-23\,;\,-6)$.

a) Montrez que $(DQ) \perp (DP)$.

b) Montrez que $(DQ) \perp (DF)$.

c) Calculez le volume exact de $QDFP$.