Orthodromie et coordonnées cartésiennes

I. Coordonnées sphériques

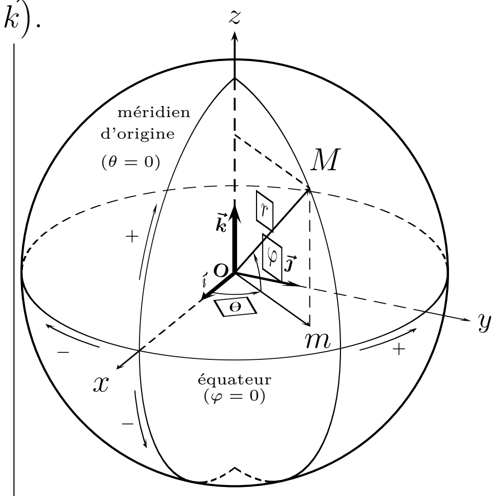
Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan de repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Le point M peut être repéré par la donnée de ses coordonnées sphériques :

- la longueur $r = OM$ appelée **rayon vecteur**
- sa **longitude** $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{Om})$
- sa **latitude** $\varphi = (\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OM})$.

$\boxed{\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]}$.



Remarques :

– Si le point considéré est un des pôles ($\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$) alors on convient que $\theta = 0$.

– Lorsque r est constant, le point M reste sur la sphère de centre O et de rayon r d'où le nom de coordonnées sphériques.

Exemple 1 : Le méridien de Greenwich est le grand cercle passant par les pôles et la ville de Greenwich. Il définit la longitude 0. L'équateur est le grand cercle placé dans le plan (xOy) perpendiculaire à l'axe des pôles (Oz), il définit la latitude 0.
La ville du Cap a une longitude de 11°22' E ($\theta \approx 11{,}37°$) et 33°55' S ($\varphi \approx -33{,}92°$). La valeur de r est le rayon de la Terre soit environ $r \approx 6371$ km.

II. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques et réciproquement

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$\boxed{x = r\cos\theta\cos\varphi}$ $\boxed{y = r\sin\theta\cos\varphi}$ $\boxed{z = r\sin\varphi}$.

Exemple 2 :
Les coordonnées cartésiennes de la ville du Cap sont :
$x \simeq 5186$; $y \simeq 1045$ et $z \simeq 3555$ (en n'oubliant pas que l'unité est ici le kilomètre).

Exemple 3 :
Donner les coordonnées sphériques du point P de coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{3}\,;\,1\,;\,-2\sqrt{3}\right)$.

Réponse :
$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \cos\theta\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{4} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

De la dernière équation, il vient $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ (et pas $-\dfrac{2\pi}{3}$ car $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$) donc $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ d'où : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ce qui donne $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Les coordonnées sphériques de P sont donc $\left(4\,;\,\dfrac{\pi}{6}\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

III. Distance sphérique (orthodromie)

Soit M et M' deux points d'une sphère (S) de centre O et de rayon r. L'intersection du plan (OMM') et de la sphère (S) est l'unique *grand cercle* de (S) passant par M et M'. La distance sphérique $\overset{\frown}{MM'}$ est alors la longueur de l'arc de ce cercle le plus petit joignant M et M' et :

$$\boxed{\overset{\frown}{MM'} = r\alpha \text{ où } \alpha = \widehat{MOM'} \text{ (mesuré en radians)}}.$$

Exemple 4 : Calculez la distance sphérique de Paris ($\theta = 2°20'$, $\varphi = 48°52'$) à Tokyo ($\theta' = 139°41'$, $\varphi' = 35°41'$).

Méthode 1 pour trouver α :

Étape 1 : je calcule les coordonnées cartésiennes des deux villes.
En appliquant les formules du II, j'obtiens environ :
$P\ (4187\,;\,171\,;\,4799)$ et $T\ (-3954\,;\,3355\,;\,3701)$

Étape 2 : je calcule le produit scalaire avec la formule
$\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$
$\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}4187\\171\\4799\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OT}\begin{pmatrix}-3954\\3355\\3701\end{pmatrix}$ donc
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OT} \simeq 4187\times(-3954) + 171\times 3355 + 4799\times 3701 = 1779406$

Étape 3 : je calcule l'angle au centre $\alpha = \widehat{MOM'}$ avec une autre définition du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\alpha$$

ce qui s'écrit aussi : $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\times||\vec{v}||}$ donc ici :

$\cos\alpha = \dfrac{1779406}{6371^2} \simeq 0{,}0438$. donc $\alpha \simeq \arccos(0{,}0438) \simeq 1{,}527$ rad.

Étape 4 : en multipliant par $r \simeq 6371$ km, j'obtiens une distance d'environ 9728 kms.

Méthode 2 pour trouver α : utiliser la formule

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\theta-\theta') + \sin\varphi\sin\varphi'}.$$

Exercices

Dans toute la fiche, nous prenons comme rayon de la Terre 6371 km.

Exercice I

Donnez les coordonnées cartésiennes de New-York (longitude 74°1' W, latitude 40°43' N) et de Moscou (longitude 37°37' E, latitude 55°45' N).

Exercice II

Soit, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, les points A, B et C de coordonnées cartésiennes :
$A\ \left(3\,;\,\sqrt{3}\,;\,6\right)$; $B\ \left(0\,;\,-2\sqrt{6}\,;\,-2\sqrt{6}\right)$; $C\ \left(3\sqrt{2}\,;\,-3\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{3}\right)$.

1°) Donnez les coordonnées sphériques de A, B et C.

2°) Faîtes une figure : placer approximativement ces points.

Exercice III

En utilisant la méthode 1, donnez la distance à vol d'oiseau entre chacun des points A, B et C.

Exercice IV

Donnez la distance à vol d'oiseau entre New-York et Moscou en utilisant successivement les deux méthodes du cours.

Exercice V

1°) Dans une feuille de tableur, prévoyez six cellules pour les coordonnées sphériques de deux points puis entrez dans d'autres cellules des formules permettant le calcul de la distance sphérique entre ces points.

2°) Même question (dans une autre feuille) avec des coordonnées cartésiennes.