TP : Courbes paramétrées 2

Rappel du TP1 : en utilisant la commande Courbe, nous pouvons définir une courbe paramétrée dans Geogebra, qui la nomme par exemple *a*.
À chaque valeur de *t* (dans l'ensemble de définition) correspond un point *M(t)* de la courbe, noté *a(t)* dans Geogebra.
Nous pouvons aussi obtenir les fonctions dérivées en tapant Dérivée(*a*), Geogebra génère un objet appelé *a'* puis en isolant les deux coordonnées (en tapant *x(a')* et *y(a')*) pour étudier le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$.

Tangentes : à chaque valeur de *t* (dans l'ensemble de dérivation) correspond un **vecteur** $\vec{M}'(t)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, noté *a'(t)* dans Geogebra.
Ce vecteur $\vec{M}'(t)$, s'il est non nul, est tangent à la courbe au point *M(t)*.

Exercice I – Vecteurs tangents à une courbe

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par : $\begin{cases} x(t)=\pi t+\sin(\pi t) \\ y(t)=t\ln(t)-t+3 \end{cases}$ pour $t \in [0\ ;\ 5]$.

Démarrez Geogebra.

1°) Faîtes afficher la courbe $\mathscr{C}$.
2°) Faîtes afficher le point de $\mathscr{C}$ de paramètre 2.
3°) Définissez la courbe dérivée de $\mathscr{C}$ puis, après l'avoir admirée, masquez-là.
4°) a) Tapez a'(2)
pour trouver les coordonnées du vecteur dérivé $\vec{M}'(2)$.
Que remarquez-vous concernant la représentation graphique obtenue ?
b) Faîtes en sorte d'obtenir le tracé du vecteur dérivé $\vec{M}'(2)$.
Aide : vous pouvez :

- soit taper u = …………………………
- soit taper Vecteur(……………………)

c) Faîtes-le partir du point de paramètre 2.

Aide : il y a un outil dans Geogebra qui permet de « copier-coller » un vecteur.

d) Complétez :

t	3	4	5
Vecteur dérivé $\vec{M}'(t)$	(;)	(;)	(;)

e) Que pouvez-vous dire concernant la tangente au point *M(3)* ?
f) Faîtes afficher ces vecteurs au bon endroit.

5°) a) Demandez le calcul de $\vec{M}'(1)$. Quel problème se pose ici ?
b) Dans ce cas de figure, la tangente est dirigée par le vecteur dérivé seconde (la dérivée seconde est la dérivée de la dérivée). Faîtes en sorte que Geogebra affiche les coordonnées de $\vec{M}''(1)$.
c) Que pouvez-vous dire concernant la tangente au point *M(1)* ?
Zoomez suffisamment sur la courbe pour vérifier cela.

Exercice II – tangentes horizontales ou verticales

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par : $\begin{cases} x(t)=e^{2t}-2t \\ y(t)=t^3-2t^2-4t+5 \end{cases}$ pour $t \in [-4\,;6]$.

1°) Déterminez par le calcul les coordonnées du ou des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est verticale.

2°) Déterminez par le calcul les coordonnées du ou des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

Vérifiez avec Geogebra, en utilisant entre autres la commande Résoudre.

Exercice III – Équations de tangentes

Nous utilisons la courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice II.

1°) Donnez les équations réduites des tangentes suivantes à la courbe $\mathscr{C}$:

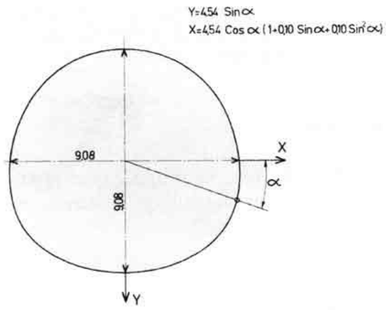
t	-2	0	2	5
Équation de la tangente				

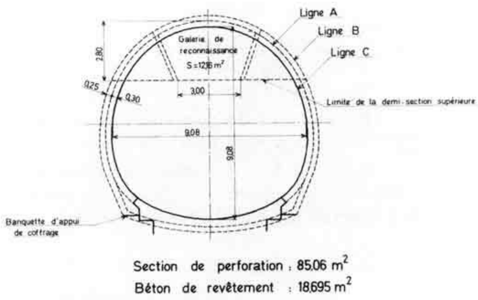
Équation d'une tangente à la main :
a) calculez les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$
b) si la tangente est verticale alors son équation est de la forme $x = \ldots$ (le x du point)
c) sinon je calcule sa pente : $m=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ puis son ordonnée à l'origine $p=y-mx$
(en remplaçant x et y par les coordonnées du point).

2°) Retrouvez à la main les équations du 1°).

Exercice IV – La caquoïde

« Albert Caquot avait toujours été frappé par la mauvaise tenue de souterrains anciens en fer à cheval, dont les radiers ont souvent tendance à bomber ; il en attribue la raison à la discontinuité de la courbure du revêtement. Sans recourir au profil circulaire, qui amène souvent à exécuter des terrassements inutiles, il propose à EDF en 1965 un profil à courbure continue qui fut réalisé, sur la Durance (à 15 km au sud de Gap, Hautes-Alpes), avec la galerie de Curbans de 9 km de longueur et de 66,40 m^2 de section finie. Ce profil est, à très peu de choses près, aussi résistant qu'une section circulaire et presque aussi commode à réaliser qu'une section en fer à cheval. Il sera utilisé à maintes reprises. La courbe d'intrados correspondante recevra le nom de *caquoïde*. »





(source)

	1°) Entrez dans Geogebra la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = \cos t\,(1+0{,}1\sin t+0{,}1\sin^2 t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ où $t \in [-\pi\ ;\ \pi]$. 2°) Avec Geogebra, étudiez la parité de x et de y. Peut-on en déduire une symétrie ? 3°) Avec Geogebra, déterminez l'effet du changement $t \rightarrow \pi - t$. Peut-on en déduire une symétrie ? 4°) Donnez un intervalle d'étude I suffisant pour cette courbe.
	5°) Déterminez les variations de y sur I.
	6°) a) Essayez d'étudier les variations de la fonction x avec Geogebra. b) Déterminez une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre t pour lequel la tangente est verticale. c) Donnez les coordonnées du point correspondant.