TP : Courbes paramétrées (avec Geogebra version 6)

Exercice I – tracé d'une courbe paramétrée et calcul de points

Cet exercice s'inspire d'un autre de Nathalie Pierre.

Certaines polices de caractères utilisent des courbes paramétrées pour dessiner les lettres.
Nous étudions un exemple de tracé d'une lettre ici.

Soit C_1 la courbe définie par : $\begin{cases} x(t) = -2t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 + 2t \end{cases}$ pour $t \in [0 ; 1]$.

Démarrez Geogebra.

1°) Entrez chacune de ces deux fonctions dans la ligne de Saisie. Cela marche-t-il ? (effacez vos constructions ensuite)

2°) Entrez maintenant dans la ligne de Saisie la commande :

(-2t^2+3t , t^2+2t)

Quel est le problème ?

3°) La commande la plus complète pour tracer une courbe paramétrée est la commande Courbe(…) !
Tapez dans la ligne de saisie cette commande (utilisez la touche Tabulation pour aller plus vite) :

Courbe(-2t^2+3t , t^2+2t , t , 0 , 1)

Geogebra appelle « a » la courbe.

4°) Dans cette question 4°), voyons comment trouver des points de la courbe…

a) Voyons maintenant comment trouver des points de la courbe C_1 correspondant à certaines valeurs de *t*.
Calculez les coordonnées du point de la courbe de paramètre 0,5.

Avec Geogebra, tapez dans la ligne de Saisie :

a(0.5)

Geogebra crée un point appelé A.

b) Déterminez l'abscisse (à 0,01 près) du point de C_1 d'ordonnée 0,5.

5°) a) Tracez la courbe C_2 définie par :

$\begin{cases} x(t) = -6t^2 + 6t + 1 \\ y(t) = -11t^3 + 24t^2 - 15t + 3 \end{cases}$ pour $t \in [0 ; 1]$.

b) Donnez :

- les coordonnées du point pour la valeur $t = 0{,}2$;
- les coordonnées du ou des points d'abscisse 1,5 ;
- les coordonnées du ou des points d'ordonnée 1.

Les courbes précédentes sont des courbes de Bézier, utilisées dans :

- *le dessin des carrosseries de voitures (P. Bézier et P. de Casteljau, années 60)*
- *des commandes de machines numériques ;*
- *des programmes de dessin vectoriel ;*
- *les polices de caractère True-type ;*
- *le morphing (déformation d'images).*

Exercice II – Tableau de valeurs

Pour reproduire une courbe sur cahier avec un peu de précision, il faut trouver des coordonnées de points. Pour cela, nous pouvons :

- soit créer un point sur la courbe avec Geogebra puis le déplacer ;
- soit utiliser le mode Table de la calculatrice ;
- soit utiliser le tableur de Geogebra.

Voyons cette dernière méthode :

	1°) Dans le même fichier qu'à l'exercice I, allez dans « Affichage » et cochez « Tableur ». Dans la cellule A1, tapez juste : t et dans la cellule B1 : M(t) Dans les cellules A2 et A3, choisissez deux valeurs de t (par exemple 0 et 0,1), sélectionnez les puis cliquez sur le petit carré bleu et glissez vers le bas pour avoir les valeurs suivantes de t. Dans la cellule B2, tapez : a(A2) puis cliquez sur le petit carré bleu et glissez vers le bas pour que Geogebra calcule les points suivants. Remarque : si on veut séparer x et y, on peut taper dans C2 et D2: x(B2) et y(B2) 2°) a) A l'aide du tableur, trouvez la valeur de t, approchée à 10^{-4} telle que $y(t) = 1$.
	b) Trouvez la valeur exacte par le calcul.

Exercice III – étude des variations

Nous utilisons ici Geogebra pour étudier le signe des dérivées.

	1°) a) Dans le même fichier qu'à l'exercice I, allez dans « Affichage » et décochez « Tableur » puis tapez dans la zone de Saisie : Dérivée(a) Observez et vérifiez la réponse de Geogebra. Remarque : la commande Dérivée(a) crée une nouvelle courbe paramétrée, dérivée de la précédente… vous pourrez la masquer (sans la supprimer). b) Allez dans « Affichage » et cochez le mode « Calcul formel ». Tapez-y à nouveau Dérivée(a) et observez ce qui s'affiche. Commentaire : en mode calcul formel, Geogebra a ici éliminé la variable t ce qui n'est pas très pratique… Petit point sur les notations utilisées par Geogebra : ➢ nous avons créé une courbe dans Geogebra qui la nomme a ➢ nous avons créé sa courbe dérivée dans Geogebra qui la nomme a' ➢ la première coordonnée correspondante se note donc x(a') 2°) a) Tapez donc dans la zone de Saisie : x(a') Geogebra ajoute automatiquement la variable t et définit une fonction f, qui correspond donc à $x'(t)$. b) Définissez de la même façon une fonction g qui correspond à $y'(t)$.

	3°) Nous pouvons maintenant savoir à quel moment x' est positive mais il faut repasser en mode « Calcul formel » (au moins dans la version 6 de Geogebra) ! Résoudre(f(t)>0) ou à quel moment elle s'annule : Résoudre(f(t)=0)
	En utilisant les résultats donnés par Geogebra, faîtes le tableau des variations conjointe pour la courbe C_1 de l'exercice I.

Exercice IV : entraînement

Soit C la courbe définie par $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t)=t.\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$ où $t \in$ IR.

	En utilisant seulement Geogebra : 1°) a) Déterminez pour quelles valeurs de t on a $x'(t) > 0$. b) Même question pour $y'(t) > 0$. 2°) Donnez les limites des fonctions x et y en $+\infty$. 3°) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes du repère.

Exercice V – Calcul formel pour l'étude de la parité

Nous utilisons ici Geogebra pour étudier la parité des fonctions.

	Dans le même fichier qu'à l'exercice I, tapez dans la zone de Saisie : x(a(-t)) pour voir si le résultat est égal ou opposé à $x(t)$. Cette fonction est-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ? Même question avec la fonction y.

Exercice VI – La clothoïde

La clothoïde (ou spirale de Cornu) est utilisée pour raccorder des tronçons rectilignes et circulaires. La trajectoire que parcourt une automobile roulant à vitesse constante et dont le conducteur tourne le volant à vitesse constante est une clothoïde, c'est donc la trajectoire la plus confortable.

Cette courbe est définie par : $\begin{cases} x(t)=\displaystyle\int_0^t \cos(u^2)\,du \\ y(t)=\displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\,du \end{cases}$ où $t \in$ IR.

On voit que les fonctions x et y sont définies par des intégrales qu'on ne peut pas calculer (x et y sont en fait les primitives qui s'annulent en 0 des fonctions $\cos(x^2)$ et $\sin(x^2)$), ce qui va nous compliquer la tâche.

On va donc demander à Geogebra de nous calculer ces intégrales en valeur approchée.

	1°) Tapez dans la zone de Saisie : Intégrale(cos(x^2),0,t) Geogebra propose de créer un curseur, acceptez ; deux variables sont créées : *t* et *f*. 2°) Modifiez ce curseur pour que *t* puisse aller de – 10 à 10 avec un pas de 0,01. 3°) Procédez de même pour définir la deuxième coordonnée, qui sera nommée *g* par Geogebra. 4°) Créez enfin un point de coordonnées qui se déplacera sur la courbe. Affichez sa trace pour pouvoir visualiser la clothoïde.

Problème : on a défini deux variables *f* et *g* dépendant de *t* mais pas d'objet de type fonction ou courbe. On ne peut donc pas utiliser de dérivée, ni de tangente à la courbe…
Pour l'instant je n'ai rien trouvé de mieux…

Un article sympa sur la clothoïde.