TP : Calcul intégral avec Geogebra

Exercice I : recherche d'une primitive

Nous cherchons les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\,(x^2 - 7)^5.$$

Affichez le mode « Calcul formel ».
Entrez ceci :

f(x) = x(x^2-7)^5

rien ne se passe.

Entrez maintenant ceci :

f(x) := x(x^2-7)^5

et la fonction f est définie pour Geogebra.

Remarque : dans le mode « Calcul formel » le = sert surtout pour les équations ; pour définir une fonction utilisez un := à la place du =.

Essayez maintenant la commande suivante :

Intégrale(f) ou Intégrale(f(x))

qui donne *l'expression* des primitives de f.

Si nous voulons que cette expression devienne une *fonction*, nous taperons :

F(x) := Intégrale(f(x))

Voici quelques erreurs à éviter :

F := Intégrale(f)	oubli du x → ne marche pas dans Geogebra
F(x) = Intégrale(f(x))	oubli du : → la fonction F n'est pas définie
F(x) = Primitive(f(x))	la commande Primitive n'existe pas !

Trouvez la primitive de f qui s'annule en 4.

Exercice II : recherche d'intégrales

Définition : l'intégrale de a à b de la fonction f est :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La procédure est donc :

① trouver une primitive F de f ;
② calculer $F(b) - F(a)$.

Calculez « à la main » les intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx$ $\qquad J = \int_0^2 x^4\,dx$ $\qquad K = \int_{-2}^{4} (x^3 - 2)\,dx$

Vérifiez vos réponses, par exemple, pour la première intégrale :

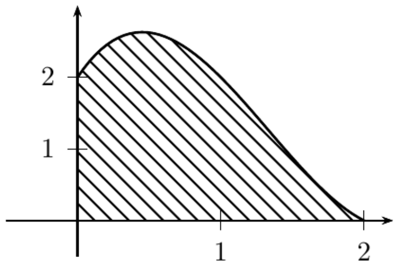
Intégrale(3x²,-1,1)

Exercice III : calculs d'aires

1°) La courbe ci-contre représente, dans un repère d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la fonction f définie sur [0 ; 2] par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

Nous cherchons à calculer l'aire exacte de la partie hachurée.



La procédure générale est :

① trouver une primitive F de f ;

② calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où a et b sont x_{min} et x_{max} ;

③ si la fonction est positive sur [a ; b] alors I représente l'aire, en unités d'aire(*) ;
si la fonction est négative sur [a ; b] alors – I représente l'aire, en unités d'aire ;

④ multiplier le résultat par l'unité d'aire pour obtenir l'aire en cm².

(*) l'unité d'aire est l'aire d'un rectangle dont la base est l'unité en abscisse et la hauteur est l'unité en ordonnée.

Exécutez chacune des étapes ①, ② et ④ .
Pour les plus rapides, prouvez (pour l'étape ③), que la fonction reste positive entre 0 et 2, conformément au graphique.

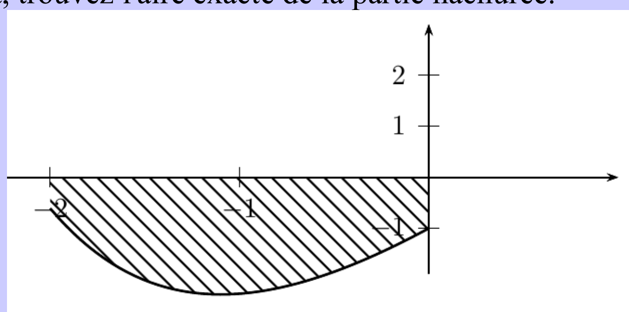
Vérifiez les étapes ① et ② avec Geogebra.

Pour visualiser l'intégrale sur le graphique, on pourra taper :

Intégrale(f,0,2)

dans la partie Saisie (qui concerne l'aspect graphique de Geogebra).

2°) Avec Geogebra, trouvez l'aire exacte de la partie hachurée.



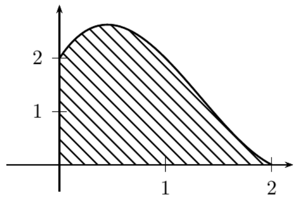
Données : $f(x) = e^{-x} + 3x - 2$

Unités sur les axes : 2,6 cm en abscisse ; 7 mm en ordonnée.

Vérifiez à la main.

Exercice IV : ordre de grandeur d'une aire

Nous reprenons la courbe du 1°) de l'exercice III :



Appelons A l'aire en unités d'aire de la partie hachurée.

1°) En utilisant un triangle et un rectangle, « prouvez » que $2 < A < 5$.

2°) Donnez un encadrement de A plus précis avec deux trapèzes.
Vérifiez la cohérence avec la réponse trouvée à l'exercice III.

Voyons maintenant comment trouver une valeur approchée d'une intégrale avec des rectangles de plus en plus fins (sommes de Riemann).

Recréez la courbe sur Geogebra, on supposera que la fonction s'appelle f.
Créez un curseur n variant de 1 à 100.
Tapez dans la ligne de Saisie :

SommeInférieure(f,0,2,n)

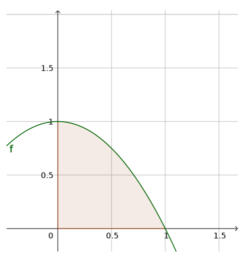
puis

SommeSupérieure(f,0,2,n)

Faîtes varier la valeur de n pour obtenir une valeur « assez précise » de A.
(on peut aussi utiliser SommeSupérieure(f,0,2,n)).

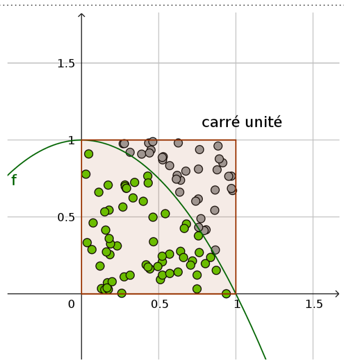
Exercice V : méthode de Monte-Carlo

1°) Nous cherchons à calculer une valeur approchée de l'aire coloriée ci-contre, sous la courbe de la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 1 - x^2$.



La méthode de Monte Carlo permet de trouver une valeur approchée d'une intégrale en « jouant aux fléchettes ».
On appellera « carré unité » l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.
Supposons que l'on lance des fléchettes dans le carré unité, certaines (en vert sur le graphique) seront sous la courbe de f et d'autres (en gris sur le graphique) au dessus.
Par exemple, si 60 fléchettes sur 100 arrivent sous la courbe alors :

	Sous la courbe	Carré unité
Fléchettes	60	100
Aire	A	1



ce qui donne (produit en croix) : $A \simeq 60/100 = 0{,}6$.

Effacez tout. Créez la fonction f.

Tapez dans la ligne de Saisie :

(random(), random())

La commande random() choisit un nombre au hasard entre 0 et 1.
La commande (random(), random()) créé donc un point à coordonnées aléatoires mais comprises entre 0 et 1 (donc un point du « carré unité ».

Effacez ce point et tapez dans la ligne de Saisie :

Séquence((random(), random()), i, 1, 100)

Geogebra crée une liste qu'il appelle L_1 (donc L_1).

La commande Séquence permet de répéter une même instruction, ici la création d'un point aléatoire dans le carré unité, un certain nombre de fois, ici 100 fois (i va de 1 à 100).

On isole ensuite de la liste L_1 les points qui sont sous la courbe de f :

GarderSi(y(A) < f(x(A)), A, L_1)

Explications :

- le point A va être remplacé par chaque point de la liste L_1 (avec GarderSi(… ,A,L_1)) ;
- on regarde si, pour chaque point A, on a y < f (x) (avec y(A)<f(x(A))) ; auquel cas le point est sous la courbe ;
- la commande GarderSi(…) ne conserve que les points vérifiant cette condition y(A)<f(x(A)).

Geogebra créé une nouvelle liste L_2 avec tous les points sous la courbe.

On demande enfin à Geogebra quel proportion de points sont sous la courbe :

Longueur(L_2)/100

(pour voir une valeur approchée du résultat : clic-droit puis Propriétés → Algèbre → Décocher « Symbolique »).

Ceci est une valeur approchée de l'aire A.
Appuyez sur F9 pour relancer le lancer des « fléchettes ».

Modifiez les commandes précédentes pour effectuer 10000 lancers de fléchettes et ainsi avoir une meilleure précision dans la valeur de A.

2°) Retrouvez une valeur approchée de l'aire de la figure de l'exercice IV avec la méthode de Monte Carlo.