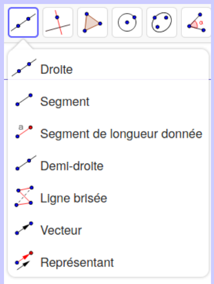
TP : produit scalaire

Exercice 1 : applications numériques

Note : ce qui suit n'est valable que dans un repère orthonormé, dans la suite nous travaillerons dans de tels repères.

Rappels :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $XX' + YY' = 0$.
Le nombre $XX' + YY'$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$. On le note $\vec{u}.\vec{v}$.

Exemple avec Geogebra	Lancez Geogebra. Utilisez l'outil vecteur pour créer le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ (vous pouvez le faire partir de l'origine si vous voulez).  Vous pouvez aussi créer des vecteurs en utilisant la zone de Saisie, par exemple, tapez-y : v = (2,8) attention : virgule, pas point-virgule ! pour créer le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$. Enfin, il suffit d'écrire u*v dans la barre de Saisie pour obtenir le produit scalaire.

1°) Dîtes par le calcul si les vecteurs sont orthogonaux (vérifiez avec Geogebra) :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2°) Dire dans chaque cas si le triangle ABC est rectangle :

a) A (11 ; – 2) ; B (8 ; – 5) et C (5 ; – 3)   b) A (2 ; 1) ; B (10 ; 3) et C (3 ; – 3)

	3°) Trouver c tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\c\end{pmatrix}$ soient orthogonaux (définissez un curseur que vous renommerez « c »).
	Retrouvez la réponse par le calcul.

Exercice 2 : calcul d'angles

Rappel :

On a aussi	$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

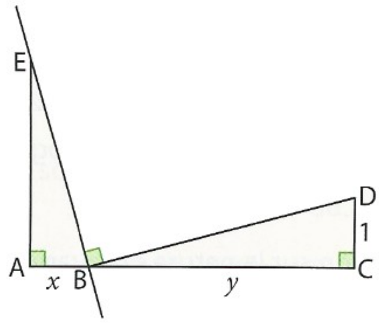
Soient A (– 2 ; 2) ; B (7 ; – 3) et C (1 ; – 4).
Écrivez le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes.
En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 3 : calcul d'angles (3D)

Créez trois points de l'espace à coordonnées entières et calculez un angle du triangle obtenu.

Exercice 4

Soients x et y deux nombres positifs.
B appartient au segment [AC] et AB = x, BC = y.



1°) Faîtes la figure pour différentes valeurs entières de x et de y (on pourra utiliser Geogebra).
Mesurez à chaque fois la longueur AE.
2°) Émettez une conjecture sur l'expression de la longueur AE en fonction de x et de y.
3°) On se place dans un repère (A ; I ; J), où B (x ; 0) et E (0 ; e).
a) Donnez les coordonnées de C et de D.
b) En utilisant le fait que $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=0$, déterminez e.

Corrigé

Exercice 1

1°) a) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=4\times2+(-1)\times8=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.

b) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=8\times(-2)+3\times5=-1\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

c) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\times3+7\times(-2)=-17\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

2°) La première étape est de faire une figure pour savoir en quel point le triangle est susceptible d'être rectangle puis de vérifier si un produit scalaire est nul.

Pour une démonstration plus rigoureuse, il faudrait faire trois produits scalaires, un pour chaque sommet du triangle…

a) A (11 ; – 2) ; B (8 ; – 5) et C (5 ; – 3) : l'angle droit semble être en B.

Il faut donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

Or $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-8\\-2-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-8\\-3-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times(-3)+3\times2=-3\neq0$ donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux et le triangle ABC n'est pas rectangle (en B en tout cas…)

b) A (2 ; 1) ; B (10 ; 3) et C (3 ; – 3) : l'angle droit semble être en A.

Il faut donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\times1+2\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

c) Créez :

- un curseur nommé c (avec l'outil curseur puis propriétés pour renommer) ;
- modifiez si nécessaire les valeurs possibles de c (avec propriétés) ;
- le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ en tapant : u=(– 4,6) ;
- le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\c\end{pmatrix}$ en tapant : v=(12,c) ;
- le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en tapant : u*v

  Geogebra l'appellera par exemple « a ».

Puis déplacez le curseur « c » jusqu'à ce que « a » soit égal à 0 ; nous trouvons que $\vec{u} \perp \vec{v}$ quand c = 8.

Par le calcul : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 12 + 6 \times c = 0 \Leftrightarrow 6c = 48 \Leftrightarrow c = 48/6 = 8$.