TP : produit scalaire (introduction)

Comme d'habitude, pensez à contrôler vos calculs avec Geogebra...

Exercice 1 : découverte d'une formule utile

1°) Soient, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, les points A (– 4 ; 5) et B (7 ; 5).
On cherche un moyen simple de savoir si le triangle OAB est rectangle, juste à l'aide des coordonnées de A et de B.
a) Calculez les longueurs exactes OA ; OB et AB.
b) Le triangle OAB est-il rectangle ?

2°) On suppose maintenant que A (x ; y) et B (x' ; y').
a) Calculez les longueurs exactes OA ; OB et AB.
b) Prouvez que le triangle OAB est rectangle si et seulement si :

$$x\,x' + y\,y' = 0.$$

c) Retrouvez la réponse à la question 1°) b).

3°) On s'intéresse maintenant à des triangles rectangles (ou pas) en un autre point que O.
Soient, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, les points A (– 4 ; 5) ; B (10 ; 3) et C (5 ; – 3).
On veut savoir si le triangle ABC est rectangle en C.
L'idée est ici de faire comme si C était l'origine du repère et donc d'observer les coordonnées de A et B à partir de C : ceci revient à calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.
a) Calculer les coordonnées de ces vecteurs.
b) Regardez si la relation $x\,x' + y\,y' = 0$ s'applique à ces coordonnées.
c) Que peut-on en déduire ?

On retiendra ceci :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $X\,X' + Y\,Y' = 0$.

Le nombre $X\,X' + Y\,Y'$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.
On le note $\vec{u}.\vec{v}$ (avec Geogebra, il suffit d'écrire u * v dans la barre de Saisie).

Note : cette définition n'est valable que dans un repère orthonormé, dans la suite on travaillera dans de tels repères.

Exercice 2 : applications numériques

1°) Dire dans chaque cas si les vecteurs sont orthogonaux (on pourra vérifier avec Geogebra) :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2°) Dire dans chaque cas si le triangle ABC est rectangle :

a) A (11 ; – 2) ; B (8 ; – 5) et C (5 ; – 3) b) A (2 ; 1) ; B (10 ; 3) et C (3 ; – 3)

	3°) Trouver c tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\c\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
	Retrouvez la réponse par le calcul.

Exercice 3 : étude de cas et deuxième formule

	1°) a) Construisez deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et affichez leur produit scalaire. b) Dans quels cas ce produit scalaire est-il positif ? Négatif ? 2°) a) Construisez deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de longueur 1. b) Affichez leur produit scalaire, l'angle entre les deux vecteurs et le cosinus de cet angle. Que remarque-t-on ? 3°) Que se passe-t-il quand les vecteurs ont pour longueur 2 ? pour longueurs 3 et 5 ? 4°) Essayez d'en déduire une autre formule pour calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

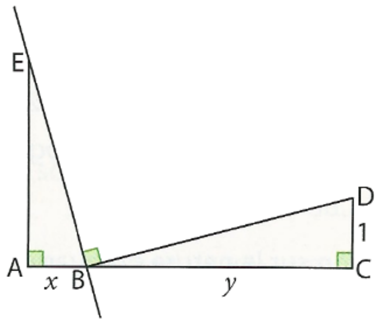
Exercice 4 : angles et longueurs

Soient $A\,(-2\,;2)$; $B\,(7\,;-3)$ et $C\,(1\,;-4)$.
Écrivez le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes.
En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 5

Soient x et y deux nombres positifs.
B appartient au segment [AC] et AB = x, BC = y.

1°) Faîtes la figure pour différentes valeurs entières de x et de y (on pourra utiliser Geogebra).
Mesurer à chaque fois la longueur AE.
2°) Émettre une conjecture sur l'expression de la longueur AE en fonction de x et de y.



3°) On se place dans un repère (A ; I ; J), où B (x ; 0) et E (0 ; e).
a) Donnez les coordonnées de C et de D.
b) En utilisant le fait que $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=0$, déterminez e.