Cours et exercices : Produit vectoriel

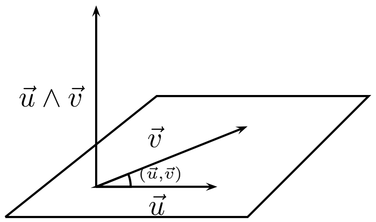
I. Définition du produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le (pseudo)vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;

⋆ sinon, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et tel que le triplet $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{u}\wedge\vec{v})$ est direct et de norme $\boxed{||\vec{u}\wedge\vec{v}||=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times|\sin(\vec{u},\vec{v})|}$.



Exemple 1

Soit, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, le vecteur $\vec{w}=\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}$. Il est orthogonal aux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ donc colinéaire à $\vec{k}$.

Le triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{w})$ a la même orientation que le triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (il est direct), le vecteur $\vec{w}$ a le même sens que $\vec{k}$.

Enfin, sa norme est $||\vec{w}||=||\vec{\imath}||\times||\vec{\jmath}||\times|\sin(\vec{\imath},\vec{\jmath})|=1$.

<u>Conclusion :</u> $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$.

Remarques

⋆ on démontrerait de même que $\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k}$; $\vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}$, etc. ;

⋆ attention : contrairement au produit scalaire, qui est un nombre, le produit vectoriel est un vecteur (comme son nom l'indique…) ;

⋆ le produit vectoriel est toujours un vecteur de l'espace.

II. Coordonnées d'un produit vectoriel

Propriété 1

Soient $\vec{u}\,(X,Y,Z)$ et $\vec{v}\,(X',Y',Z')$. Les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ se calculent à l'aide de « produits en croix ».

$$\begin{array}{cc} \cancel{X} & \cancel{X'} \\ Y & Y' \\ Z & Z' \end{array}\quad \boxed{YZ'-Y'Z}\qquad \begin{array}{cc} X & X' \\ \cancel{Y} & \cancel{Y'} \\ Z & Z' \\ X & X' \end{array}\quad \boxed{ZX'-Z'X}\qquad \begin{array}{cc} X & X' \\ Y & Y' \\ \cancel{Z} & \cancel{Z'} \end{array}\quad \boxed{XY'-X'Y}$$

$\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(YZ'-Y'Z,\ ZX'-Z'X,\ XY'-X'Y)$.

Remarques

⋆ attention à l'ordre des calculs, surtout pour la deuxième coordonnée ;

⋆ les calculs se font avec des coordonnées de vecteurs, pas de points ;

⋆ dans le plan (deux coordonnées), on pourra considérer que $z=0$.

Exemple 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\times5-3\times3=1\\3\times(-2)-(-1)\times5=-1\\(-1)\times3-2\times(-2)=1\end{pmatrix}$.

Exercice I (calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$)

1°) Calculez les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$	b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$	c) $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-6\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\4\\-4\end{pmatrix}$
d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\3\\-15\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-4\\20\end{pmatrix}$	e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$	f) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$

2°) Formulez quelques remarques concernant certains des résultats.

III. Quelques propriétés du produit vectoriel

Propriétés 2

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0} \qquad\qquad \vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u} \qquad\qquad \vec{u}\wedge(k\vec{v})=(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$$

Exemple 3

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=(2\vec{\imath}-\vec{k})\wedge(3\vec{\imath})=6(\vec{\imath}\wedge\vec{\imath})-3(\vec{k}\wedge\vec{\imath})=-3\vec{\jmath}$

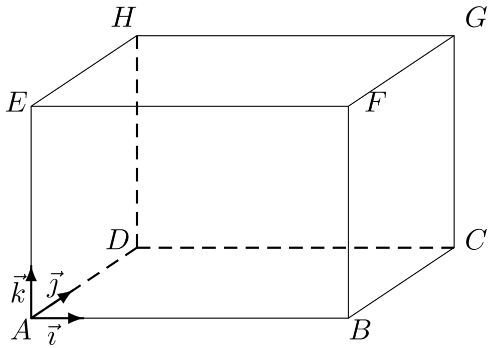
donc les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Remarque

En pratique, nous utiliserons peu ces propriétés en BTS.

Exercice II (calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède dont les dimensions sont $AB=6$, $AD=3$ et $AE=4$. Nous travaillons dans le repère de l'espace $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.



1°) Calculez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ de deux façons différentes.

2°) Calculez les coordonnées des vecteurs suivants :

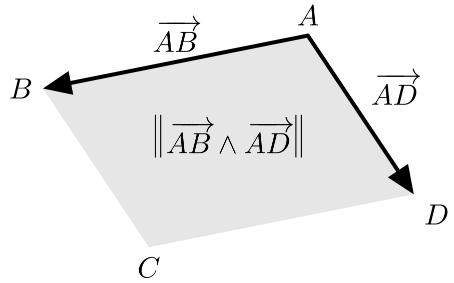
a) $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BE}$ b) $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{HG}\wedge\overrightarrow{HB}$

IV. Applications du produit vectoriel

1) Aire d'un triangle, d'un parallélogramme

Propriété 3

⋆ L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|}$.



⋆ L'aire d'un triangle ABC est donc égale à $\boxed{\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

Remarque

Il s'agit de la technique la plus rapide <u>et</u> la plus précise pour calculer l'aire d'un triangle quelconque.

Exemple 4

Soients $A\,(-1\,;\,-3\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,-3\,;\,-1)$ et $C\,(-2\,;\,5\,;\,1)$. Calculons l'aire du triangle ABC. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\8\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}24\\5\\16\end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||=\sqrt{857}$. L'aire est donc $\dfrac{\sqrt{857}}{2}$.

Exercice III (aire d'un triangle, avec les points de l'exercice II)

1°) Calculez les aires des triangles AHC et EFD.

2°) Déterminez la distance exacte entre H et la droite (AC).

2) Équation du plan (ABC)

Propriétés 4

$\star$ tout plan a des équations de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$;
$\star$ le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) ;
$\star$ ses trois coordonnées fournissent les trois premiers coefficients a, b, c d'une équation du plan (ABC).

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ donc $24x + 5y + 16z + d = 0$ est une équation du plan (ABC), il reste à trouver d en remplaçant x, y, z par les coordonnées d'un point du plan (exemple : A). Nous trouvons $d = 7$, l'équation est donc $24x + 5y + 16z + 7 = 0$.

Remarques

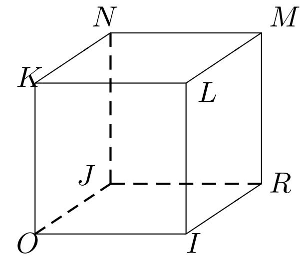
$\star$ pensez à vérifier que votre équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des trois points ;
$\star$ chaque plan a une infinité d'équations, celle que vous trouverez ne sera pas forcément identique à celle donnée par Geogebra mais elle doit lui être proportionnelle ;
$\star$ il est possible d'utiliser un produit scalaire pour éviter de chercher d (voir l'exemple suivant).

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, en notant $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:
$M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-(-1)) \times 24 + (y-(-3)) \times 5 + (z-2) \times 16 = 0 \iff 24x + 5y + 16z + 7 = 0$

Exercice IV (équations de plans, avec les points de l'exercice II)
Déterminez une équation de chacun des plans : (AHC), (EFD), (ADF).

Exercice V (aires et volumes)
L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-contre représente ce cube. On note A le milieu de $[IL]$ et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.



1°) a) Déterminez les coordonnées des points A et B.
b) Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
c) Montrez alors que l'aire du triangle OAB est : $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

2°) Le point $C\left(1\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$ appartient-il à (P) ? Justifiez votre réponse.

3°) On considère le tétraèdre $OABK$.
a) Montrez que le volume de ce tétraèdre est : $\dfrac{1}{9}$ (rappel : le volume d'un tétraèdre est égal à l'aire de la base fois la hauteur divisé par 3).
b) Calculez alors la distance du point K au plan (P).

Exercice VI (moment d'une force)
« Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point donné O est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, souvent appelé pivot. »
Par analogie (avec le moment d'une force par rapport à un axe), une force exercée sur une porte la fera tourner de façon plus ou moins efficace, suivant l'intensité de la force et l'endroit où on applique la force.
Ce moment se définit ainsi : $\boxed{\mathscr{M}_O\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}}$ où B est le point d'application de la force.
On reprend les éléments de l'exercice II.

1°) a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.
b) En déduire $\mathscr{M}_D(\overrightarrow{BC})$.

2°) Déterminer :
a) $\mathscr{M}_C(\overrightarrow{EB})$ b) $\mathscr{M}_H(\overrightarrow{DF})$ c) $\mathscr{M}_I(\overrightarrow{DC})$
(où I est le milieu de $[AB]$).