Cours et exercices : Fonctions ln et exponentielle

I. Définitions

Propriété 1

Il existe une fonction unique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ *, qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse.*

Définition

Cette fonction est appelée **fonction logarithme népérien**.

On a donc : $\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$ $\boxed{\ln 1 = 0}$.

Propriété 2

Le nombre 1 a un antécédent unique par la fonction ln.

Définition

Le nombre e est cet antécédent : $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.

On a $\mathrm{e} \simeq 2,718$.

Propriété 3

La fonction ln *a une fonction réciproque, définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $]0\,;\,+\infty[$.

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** de base e et notée exp.

Notation : on remplace souvent $\exp(x)$ par e^x.

Conséquences de la réciprocité de exp et de ln :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\mathrm{e}^x) = x}$ $\boxed{\forall x \in\ ]0\,;\,+\infty[\ , \mathrm{e}^{\ln(x)} = x}$

$\boxed{\ln x = y \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^y}$ $\boxed{\mathrm{e}^x = y \text{ et } y > 0 \Longleftrightarrow x = \ln y}$

Autres conséquences de ce qui précède :

$\boxed{\mathrm{e}^x > 0 \text{ pour tout réel } x}$ $\boxed{\mathrm{e}^0 = 1 \text{ et } \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$

Exercice I (quelques équations)

Résoudre les équations :

a) $\ln x = 5$ b) $\mathrm{e}^x - 4 = 3$ c) $4\,\mathrm{e}^{2x-1} = 1$ d) $2\ln(x+5) - 3 = 0$

e) $\mathrm{e}^{3x-4} + 4 = 3$ f) $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}$ g) $\ln^2 x = 1$ h) $1 - 3\,\mathrm{e}^{2-x} = 0$

II. Propriétés algébriques

1) Pour la fonction ln

Propriétés 4

Soient a, b *deux nombres strictement positifs et* n *un entier.*

On admet que :

$\boxed{\ln(a.b) = \ln a + \ln b}$ $\boxed{\ln(a^n) = n \ln a}$ $\boxed{\ln \frac{1}{a} = -\ln a}$ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$.

Exemples 1 :

- $\ln 12 - \ln 2 = \ln(12/2) = \ln 6$.
- $5\ln 2 - \ln 8 = 5\ln 2 - \ln\left(2^3\right) = 5\ln 2 - 3\ln 2 = 2\ln 2$.
- $\ln(3\,\mathrm{e}^2) = \ln(3) + \ln(\mathrm{e}^2) = \ln 3 + 2\ln \mathrm{e} = \ln 3 + 2$.

Exercice II

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(1 + \ln x)$.

Calculez les valeurs exactes de $f(\mathrm{e})$, $f(\mathrm{e}^2)$ et $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

2) Pour la fonction exp

Les propriétés de exp sont les mêmes que pour les puissances (par exemple les puissances de 10).

Pour tous les nombres a et b, on a :

$\boxed{\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b}$ $\boxed{\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b}$

Exercice III

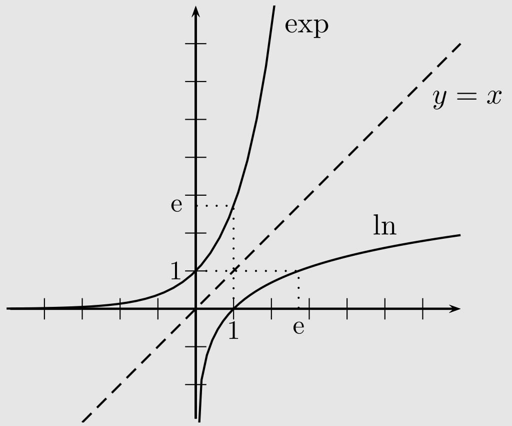
Simplifiez : $A = \left(\mathrm{e}^2\right)^3$ $B = \mathrm{e}^{2^3}$ $C = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^5$ $D = \left(\mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}^5\right)^2$

$E = \mathrm{e}^{2-\ln 2}$ $F = \mathrm{e}^{\ln 4} + \mathrm{e}^{-\ln 4}$

III. Étude des fonctions ln et exp

1) Courbes des fonctions ln et exp

Remarques :
– les courbes des fonctions exponentielle et logarithme néperien sont symétriques par-rapport à la droite d'équation $y = x$;
– la connaissance de ces courbes permet de retrouver les variations et les limites de ces deux fonctions (voir 2) et 3)).



2) Variations et (in)équations

Propriété 5

Les fonctions ln *et* exp *sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition.*

Conséquences :

$$\boxed{\ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b \text{ et } a,\, b \text{ positifs}}$$

$$\boxed{\ln a < \ln b \text{ équivaut à } a < b \text{ et } a,\, b \text{ positifs}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b} \qquad \boxed{\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^a > b \text{ et } b > 0 \iff a > \ln b}$$

$$\boxed{\ln a > b \iff a > \mathrm{e}^b}$$

Exemples 2 :
- $\ln(x-2) = \ln 5 \iff x - 2 = 5 \iff x = 7$.
- $\ln(x-5) = \ln(2x-8) \iff x = 3$ mais 3 n'est pas solution car $3 - 5 = -2 < 0$: il n'y a pas de solution.
- $\ln(2x+1) > 3 \iff 2x + 1 > \mathrm{e}^3 \iff x > \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{2}$.
- $\mathrm{e}^{x-2} \leqslant 2 \iff x - 2 \leqslant \ln 2 \iff x \leqslant 2 + \ln 2$.

Remarques :
L'équation $\mathrm{e}^x = -2$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.
Par contre, l'inéquation $\mathrm{e}^x > -2$ est vérifiée par tout réel x pour la même raison (mais $\mathrm{e}^x < -2$ n'a pas de solution).

Exercice IV ((in)équations)

Attention : vérifiez que les solutions trouvées sont permises (pas de nombre négatif dans un ln !). Résoudre les équations suivantes :

1°) $\ln(3x-2) = \ln(x+3)$	2°) $-7\ln x > 2$
3°) $\ln(2x+1) = \ln(x-3)$	4°) $3\ln x - 4 > 0$
5°) $\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}^{x-5}$	6°) $2\,\mathrm{e}^x + 3 > 8$
7°) $-3\,\mathrm{e}^{-x+2} + 1 \geqslant 0$	8°) $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x} > 0$

3) Limites

On retriendra les limites suivantes en se souvenant des courbes des deux fonctions :

Propriétés 6

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty} \quad \textit{et} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}.$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0} \quad \textit{et} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}.$$

Remarque : la première limite montre que la courbe de la fonction ln se rapproche de l'axe des ordonnées quand x tend vers 0. On dit alors que cette droite est une **asymptote** pour la courbe.
La courbe de la fonction ln admet une asymptote : l'axe des ordonnées.
La courbe de la fonction exp admet une asymptote : l'axe des abscisses.

Exercice V

Calculez les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(3x-5)$	2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-2x+3)$	3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\ln x + 5$
4°) $\lim\limits_{x \to 0} 3x - 5\ln x$	5°) $\lim\limits_{t \to 2} \ln(t-2)^2$	6°) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(\ln x)$
7°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{5x-7}$	8°) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{2x-10}$	9°) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\,\mathrm{e}^{-x} + 2$

4) Calculs de dérivées

a) Dérivées de $\ln x$ et de e^x

Rappel : la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse : $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$.

Propriété 7

exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est elle-même :* $\boxed{(e^x)' = e^x}$.

Exemple 3 : Si $f(x) = 5\,e^x - 3\ln x + 1$ alors $f'(x) = 5\,e^x - \dfrac{3}{x}$.

Exercice VI (étude de fonctions)

1°) a) Etudiez les limites et les variations de la fonction f définie par $f(x) = 3\ln x + \dfrac{2}{x} - 5$ sur $\left]\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$.

b) En déduire :
– un extremum éventuel pour f ;
– le nombre de solutions de $f(x) = -1$ puis de $f(x) = -4$.

2°) Mêmes questions avec $g(x) = -2x\ln x + 5x - 1$ sur $]1\,;\,+\infty[$

5) Calculs de dérivées

a) Dérivées de $\ln u$ et de e^u

Propriété 8

Soit u une foncion dérivable sur un intervalle I et à valeurs positives. Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

Propriété 9

Si u est dérivable sur un intervalle I alors e^u est dérivable sur I et $\boxed{(e^u)' = u'.e^u}$.

Exemples 4 :
- Si $f(x) = \ln(x^2+3)$ alors $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$.
- Si $f(x) = e^{2x-3}$ alors $f'(x) = 2\,e^{2x-3}$.
- Si $f(t) = e^{-t^2}$ alors $f'(x) = -2t\ e^{-t^2}$.

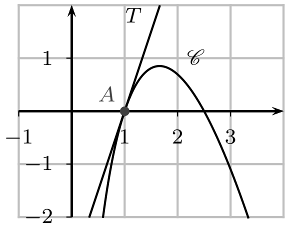
Exercice VII

Calculez les dérivées des fonctions définies, sur un certain intervalle, par les formules suivantes :

1°) $f(x) = \ln(2x+3)$	2°) $g(x) = 3\ln x - \ln(3x)$	3°) $h(x) = x\ln x^2$
4°) $i(x) = e^{-x}$	5°) $j(t) = 2t - e^{2t}$	6°) $k(x) = 3x\,e^{-2x}$

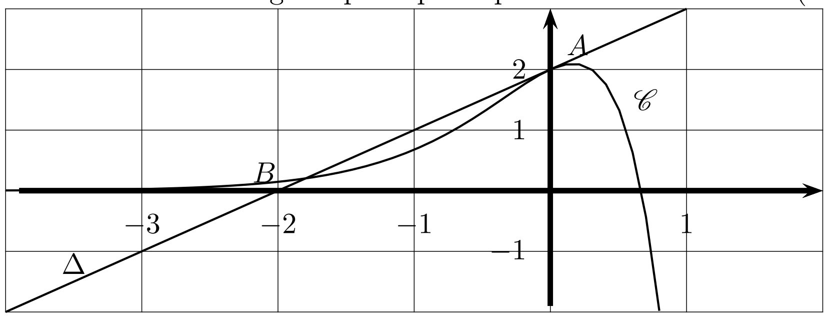
Exercice VIII

La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\ln(x)$.
Cette courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 2,5. La tangente T au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = 3x - 3$.
Déterminez a et b.



Exercice IX

1°) La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\,e^{2x}$, où a et b sont des nombres réels. La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(-2, 0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.
b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.
c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite on admet que $f(x) = (-3x+2)\,e^{2x}$.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3°) Donnez, par lecture graphique, l'équation d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. En admettant ce résultat, donnez une limite pour f.

4°) a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (1-6x)\,e^{2x}$;
b) Résoudre $f'(x) \geq 0$; en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.