Exercices et cours : Dérivation

Exercice I (Intérêt de la dérivée)
On veut tracer la courbe de la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = 1{,}5x^2 - 0{,}25x + 1$.

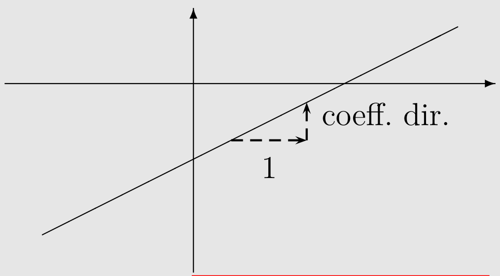
1°) Compléter le tableau de valeurs suivants puis faire une conjecture sur les variations de f :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x)$											

2°) Calculer $f(0{,}1)$. Que remarque-t-on ?

3°) Peut-on, en toute sécurité, tracer la courbe d'une fonction à l'aide d'un tableau de valeurs ?

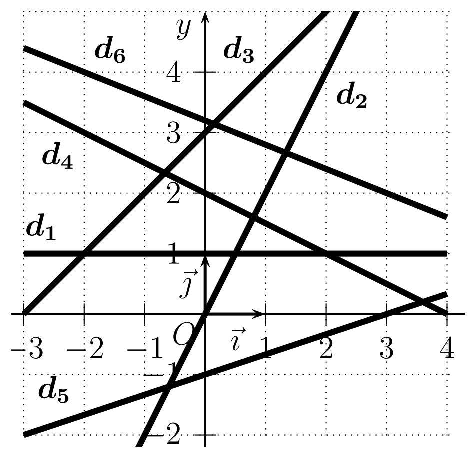
Rappels sur le coefficient directeur (la « pente ») d'une droite :
• le coefficient directeur indique la vitesse de croissance (s'il est positif) ou de décroissance (s'il est négatif) d'une droite ;
• on peut le lire graphiquement :



• ou le calculer avec la formule $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$;
• si une droite a pour équation $y = mx + p$ alors son coefficient directeur est m.

Exercice II
Déterminez les coefficients directeurs approchés puis exacts des droites représentées ci-contre.

	$m \simeq$	$m =$
d_1		
d_2		
d_3		
d_4		
d_5		
d_6		



I. Dérivée d'une fonction en un point

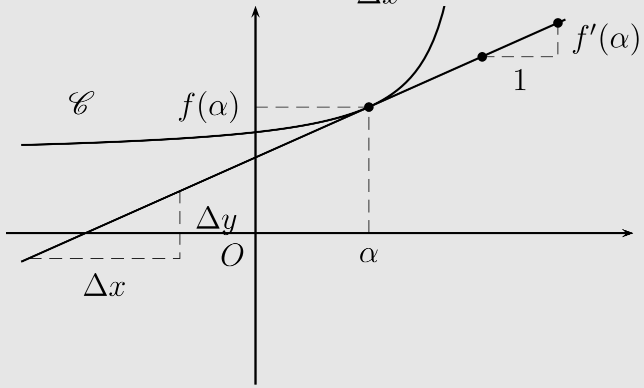
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et α un nombre appartenant à I. On dit que la fonction f est **dérivable** en α si le nombre $\dfrac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en α et notée $f'(\alpha)$.

$$\boxed{f'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}}$$

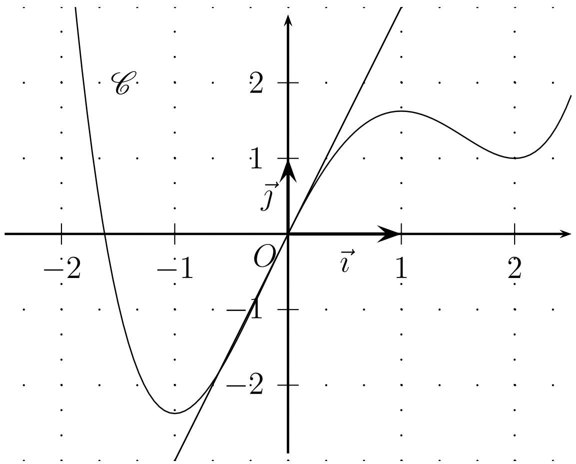
II. Interprétation graphique du nombre dérivé

Propriété 1
Si f est dérivable en α alors la courbe représentative de f admet une tangente en son point d'abscisse α et $\boxed{f'(\alpha) \text{ est le coefficient directeur de cette tangente}}$.

(sur le graphique ci-dessous, $f'(\alpha) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$)



Exercice III (interprétation graphique)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathscr{C}$ est partiellement représentée ci-dessous, avec quelques tangentes.



1°) Donnez des valeurs approchées de : $f(2)$; $f'(2)$; $f(0)$; $f'(0)$; $f'(-1)$.

2°) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 0$	b) $f'(x) = 0$	c) $f(x) > 0$	d) $f(x) = -3$
e) $f(x) \leqslant 1$	f) $f'(x) > 0$	g) $f(x) \geqslant 0$	h) $f'(x) < 0$

Dans la suite, f est une fonction dérivable sur son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un certain repère.

Exercice IV
Traduire chacune des phrases suivantes en condition(s) sur f et/ou sur f' :

1°) $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(-2\,;\,1)$.

2°) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en son point d'abscisse 3.

3°) $\mathscr{C}$ a une tangente de pente 2 en son point de coordonnées $(1\,;\,-5)$.

4°) $\mathscr{C}$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(3\,;\,-2)$.

5°) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,2)$ et a une tangente en ce point qui passe par le point de coordonnées $(-3\,;\,1)$.

Exercice V
Trouver l'expression de f dans chacune des questions suivantes :

1°) f est affine, $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(4\,;\,7)$ et sa dérivée est -1.

2°) f est du second degré, $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(1\,;\,-1)$ et a une tangente horizontale en son point de coordonnées $(2\,;\,-3)$.

3°) f est du second degré, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(2\,;\,0)$ et $(-5\,;\,0)$ et l'équation de la tangente en $(2\,;\,0)$ est $y = 7x - 14$.
Remarque : une fonction du second degré peut aussi s'écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, quand $\Delta > 0$.

III. Fonction dérivée d'une fonction

Définition

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point α de I. La fonction qui associe à tout x de I le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée (fonction) **dérivée** de f.

IV. Variations d'une fonction

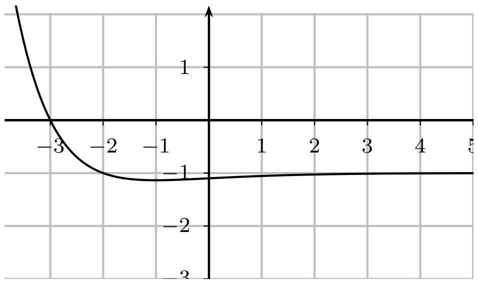
Théorème 1 (Théorème de Lagrange)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

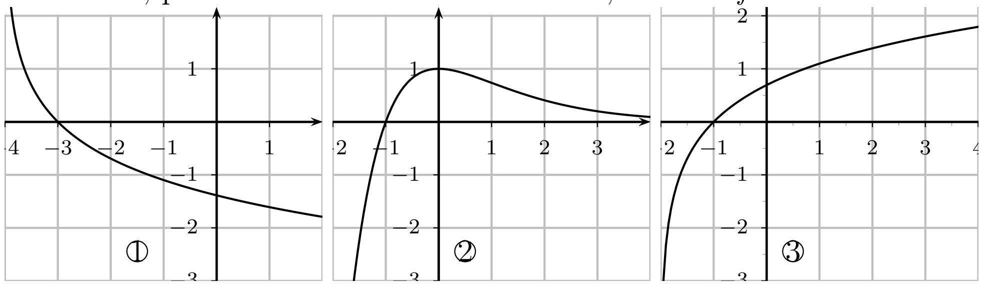
- *Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.*
- *Si $f' > 0$ sur I sauf en certains points où f' s'annule alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f' < 0$ sur I sauf en certains points où f' s'annule alors f est strictement décroissante sur I.*

Exercice VI

Voici la courbe d'une fonction f :



Retrouvez, parmi les trois courbes suivantes, celle de f' :



V. Calculs de dérivées

1) Dérivée des fonctions de base

Propriété 2

Le tableau des dérivées des fonctions de base est :

Si $f(x) = \dots$	*alors $f'(x) = \dots$*	*quand $x \in \dots$*
k *(constante)*	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \geqslant 0)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$1/x$	$]\,0\,;\,+\infty\,[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

2) Opérations algébriques et dérivées

Propriété 3

Soient u et v deux fonctions dérivables (sous-entendu sur un intervalle I) et k une constante. Alors (avec quelques précautions) :

$\boxed{(u+v)' = u' + v'}$ $\boxed{(k.u)' = k.u'}$ $\boxed{(u.v)' = u'v + v'u}$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}}$ $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$ $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$

$\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$ $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u}$.

Exercice VII (calcul de dérivées)

Calculez les dérivées des expressions suivantes :

a) $f(t) = t^3 + t^2 + 1$	b) $f(x) = x^5 - x + 2$	c) $f(x) = -5x$
d) $f(x) = \dfrac{x^3}{6}$	e) $f(x) = (6x-1)\sqrt{x}$	f) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
g) $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+1}$	h) $f(\theta) = \dfrac{\theta+1}{3\theta^2+2}$	i) $f(x) = (5x^2-5)^2$

Exercice VIII (équation de la tangente)

Pour chacune des fonctions et des nombres a suivants, donnez une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a.

Cette équation s'écrit : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

1°) $f(x) = x^2 - 6$ avec $a = 1$ 2°) $f(x) = 5x^3 - 2x$ avec $a = -2$

(pour vérification : vous pouvez tracer sur votre calculatrice, pour chaque question, la courbe de f et la tangente trouvée.)

Pour étudier les variations d'une fonction f, on peut :
- Calculer la dérivée f' de la fonction f
- Étudier le signe de f', celui-ci donnant le sens de variations de f.

Exercice IX (variations)

Pour chacune des fonctions suivantes :

a) faîtes le tableau de variations;

b) indiquez si la fonction a un maximum et / ou un minimum;

c) trouvez les solutions (éventuellement approchées) de $f(x) = 0$;

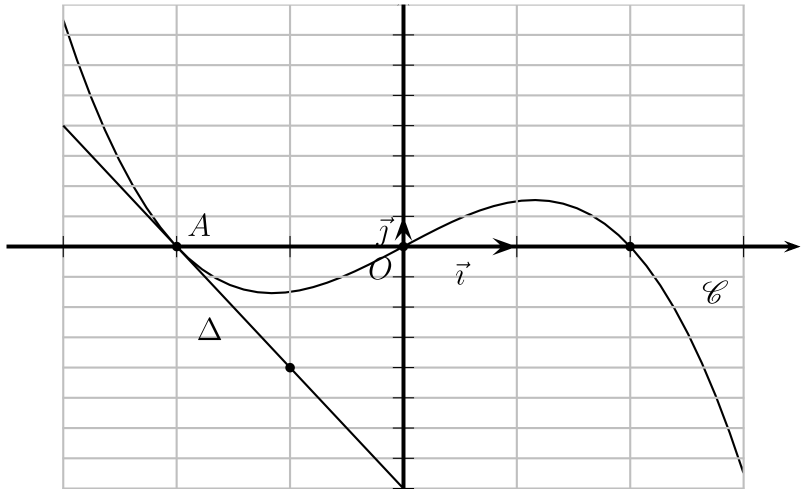
d) déduire de a) et de c) le tableau de signes de f;

e) donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$.

1°) $f(x) = 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$	2°) $g(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$
3°) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$	4°) $f(x) = \dfrac{3x-1}{-2x+5}$ sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$

Exercice X

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;3]$. La droite Δ est tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(-2\,;0)$ (voir figure ci-dessous).



1°) Par lecture graphique, déterminer :

a) $f(-2)$, $f'(-2)$, $f(2)$;

b) le signe de $f'(2)$ puis le signe de $f'(0)$.

c) le tableau de signe de f et celui de f';

2°) On admet qu'une expression de $f(x)$ est

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a) Déterminer un système ayant a, b, c, d comme inconnues.

b) Résoudre ce système et en déduire une expression de $f(x)$.

3°) a) Calculez la dérivée f' de f.

b) Déduisez-en le tableau de variations de f. Vérifier avec le graphique.

4°) a) Vérifiez que $f(x) = \dfrac{x}{2}(2-x)(2+x)$ pour tout x réel.

b) En déduire les solutions de $f(x) = 0$.

c) En déduire le tableau de signes de f.