Exercice I

1°)

x	$-\infty$		$-0,8$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-1,4$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-0,8$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate que les tableaux de signes de f et de g' correspondent donc on peut conjecturer que $f = g'$.

2°) Le plus simple ici est de chercher d'abord une expression de $f(x)$.
f est une fonction polynôme du quatrième degré donc
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ et $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.
En observant la courbe de f, on voit que : $f(-1) = 2$; $f(0) = -1$; $f(1) = 0$; $f'(1) = 1$ et $f'(0) = 2$.
En remplaçant dans les expressions de f et f', on obtient le système :

$$\begin{cases} a-b+c-d+e=2 \\ e=-1 \\ a+b+c+d+e=0 \\ 4a+3b+2c+d=1 \\ d=2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a-b+c=5 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+3b+2c=-1 \end{cases}$$

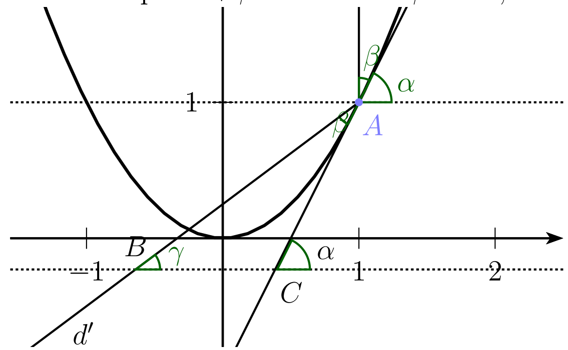
En soustrayant les deux premières lignes, on trouve $b = -3$ d'où :

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 4a+2c=8 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2a+2c=4 \\ 4a+2c=8 \end{cases} \quad \text{d'où } 2a = 4 \text{ donc } a = 2 \text{ puis } c = 0.$$

Conclusion : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.
g est une fonction polynôme du cinquième degré donc
$g(x) = mx^5+nx^4+px^3+qx^2+rx+s$ et $g'(x) = 5mx^4+4nx^3+3px^2+2qx+r = f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1$. Donc, par identification : $5m = 2$, $4n = -3$, $3p = 0$, $2q = 2$ et $r = -1$ c'est-à-dire $g(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 + x^2 - x + s$. Enfin, par lecture graphique, on a $g(0) = 2$ donc $g(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 + x^2 - x + 2$.

Exercice II

1°) Pour $x = 1$, le coefficient directeur de la tangente Δ est $f'(1) = 2 \times 1 = 2$.
De plus, le coefficient directeur d'une droite est égal à la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'horizontale donc $\tan\alpha = 2$ d'où $\alpha \simeq 63,43°$.
Par ailleurs, il est clair que $\alpha + \beta = 90°$ donc $\beta \simeq 26,57°$.



Enfin, dans le triangle ABC : $\gamma + \beta + (180 - \alpha) = 180$ donc $\gamma = \alpha - \beta \simeq 36,86°$.

2°) a) $\gamma = \alpha - \beta = \gamma = \alpha - (90 - \alpha) = 2\alpha - 90$.

b) $\tan\gamma = \tan(2\alpha - 90) = \dfrac{\sin(2\alpha-90)}{\cos(2\alpha-90)} = \dfrac{\sin(2\alpha)\cos 90 - \cos(2\alpha)\sin 90}{\cos(2\alpha)\cos 90 + \sin(2\alpha)\sin 90} = \dfrac{-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \dfrac{-(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \dfrac{-\cos(\alpha) + \dfrac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{2\sin(\alpha)} = \dfrac{-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right)$.

c) $\tan\gamma$ est le coefficient directeur de d' donc l'équation réduite de d' s'écrit : $y = (\tan\gamma)x + p$. Notons $(a\,;a^2)$ les coordonnées de A. Alors, le coefficient directeur de Δ est $\tan\alpha = f'(a) = 2a$ ce qui donne $\tan\gamma = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2a} + 2a\right) = -\dfrac{1}{4a} + a$.
La droite d' passe par A donc : $a^2 = (\tan\gamma) \times a + p$ d'où $p = a^2 - a\tan\gamma = a^2 - a\left(-\dfrac{1}{4a} + a\right) = \dfrac{1}{4}$.
L'équation réduite de d' s'écrit donc $y = (\tan\gamma)x + \dfrac{1}{4}$.
Conclusion : quel que soit la position de la droite d (rayon lumineux), la droite d' (rayon réfléchi par la parabole) passe toujours passe le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$. Cette caractéristique permet à une parabole de concentrer des rayons parallèles (représentés par d) en un point fixe.